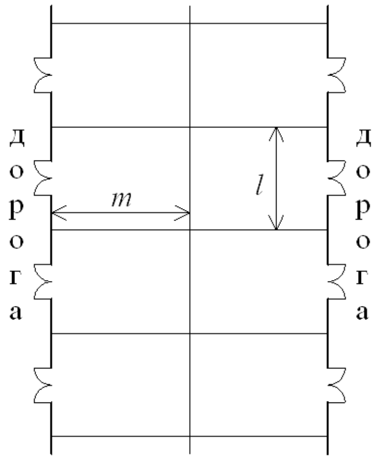
Пример условия Задачи 1 по ОЭТ:

В садоводческом посёлке прямоугольные участки площадью 800 м^2 огорожены забором по 300 руб./м со включающей ворота стороны дороги и по 200 руб./м по общим с соседними участками боковым и задней сторонам.

Определить размеры участков вдоль (l) и перпендикулярно (m) дороге, минимизирующие стоимость их огораживания, и вычислить эту стоимость (C), приходящуюся на один участок, если ворота стоят 1000 руб., а их длина 3 м.



Решение: 1) $m = 800/l$

2) $C = l(200)/2 + (l-3)(300) + 1000 + 2m(200)/2 = 400l + 100 + 160000/l \to min$

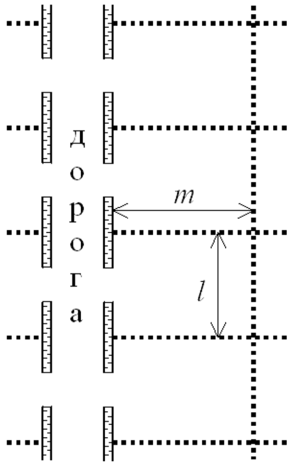
и достигает его, когда $dC/dl = 400 - 160000/l^2 = 0 \quad l^2 = 160000/400 = 400 \quad l = 20$ м

3) $m = 800/20 = 40$ м, $C = 400(20) + 100 + 160000/20 = 16100$ руб.

Ответ: $l = 20$ м, $m = 40$ м, $C = 16100$ руб.

Цена и длина ворот		Данные	Площадь	Цены заборов, руб./м		Данные	Площадь	Цены заборов, руб./м	
руб.	м	№	участка, м^2	у дороги	внутри	№	участка, м^2	у дороги	внутри
500	4	**1**	320	108	144	**31**	1280	108	144
700	3	**2**	384	240	240	**32**	1536	240	240
600	4	**3**	448	160	128	**33**	1792	160	128
900	3	**4**	486	270	270	**34**	1944	270	270
500	4	**5**	500	135	180	**35**	2000	135	180
800	3	**6**	512	240	160	**36**	1152	240	160
900	4	**7**	576	280	80	**37**	1296	280	80
1000	3	**8**	600	300	300	**38**	1350	300	300
900	4	**9**	648	270	180	**39**	1458	270	180
600	3	**10**	700	200	160	**40**	1008	200	160
500	4	**11**	720	162	216	**41**	1620	162	216
1100	3	**12**	726	330	330	**42**	2904	330	330
1200	4	**13**	864	360	360	**43**	1944	360	360
1100	3	**14**	900	350	100	**44**	1296	350	100
1200	4	**15**	968	330	220	**45**	2178	330	220
600	3	**16**	980	189	252	**46**	1620	189	252
700	4	**17**	1008	240	192	**47**	2268	240	192
1200	3	**18**	1014	390	390	**48**	1536	390	390
1100	4	**19**	1152	360	240	**49**	2048	360	240
1400	3	**20**	1176	420	420	**50**	2646	420	420
1200	4	**21**	1250	375	250	**51**	1800	375	250
700	3	**22**	1280	216	288	**52**	2880	216	288
1300	4	**23**	1296	420	120	**53**	2304	420	120
1400	3	**24**	1350	450	450	**54**	1944	450	450
1200	4	**25**	1352	390	260	**55**	3042	390	260
900	3	**26**	1372	280	224	**56**	2800	280	224
1300	4	**27**	1568	420	280	**57**	2450	420	280
800	3	**28**	1620	243	324	**58**	2880	243	324
1500	4	**29**	1764	490	140	**59**	784	490	140
1400	3	**30**	1800	450	300	**60**	1250	450	300

Пример условия Задачи 2 по ОЭТ:



В коттеджном посёлке прямоугольные участки площадью 700 м^2 разделены дренажными канавками с решётчатым покрытием по общей цене 160 руб./м и выходят одной стороной на дорогу по 400 руб./м вместе с открытыми придорожными канавами.

Определить размеры участков вдоль (l) и перпендикулярно (m) дороге, минимизирующие стоимость благоустройства границ участков, и вычислить эту стоимость (C), приходящуюся на один участок, если для въезда на участок в придорожные канавы уложены железобетонные трубы по 1000 руб./м длиной 3 м.

Решение: 1) $m = 700/l$

2) $C = l(160)/2 + l(400)/2 + 1000{\times}3 + 2m(160)/2 = 280l + 3000 + 112000/l \rightarrow min$

и достигает его, когда $dC/dl = 280 - 112000/l^2 = 0$ $l^2 = 112000/280 = 400$ $l = 20$ м

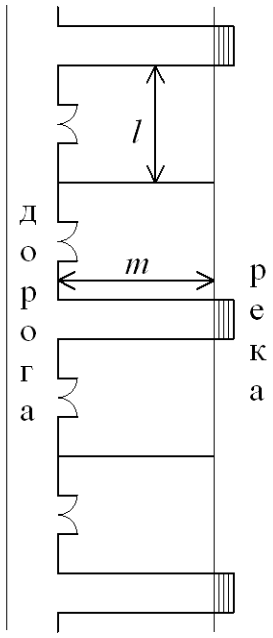
3) $m = 700/20 = 35$ м, $C = 280(20) + 3000 + 112000/20 = 14200$ руб.

Ответ: $l = 20$ м, $m = 35$ м, $C = 14200$ руб.

Цена трубы, руб./м	Длина трубы, м	Данные №	Площадь участка, м^2	Цены, руб./м		Данные №	Площадь участка, м^2	Цены, руб./м	
				канавки	дороги			канавки	дороги
700	4	**1**	384	240	480	**31**	864	240	480
500	3	**2**	392	140	420	**32**	882	140	420
600	4	**3**	448	128	320	**33**	1008	128	320
900	3	**4**	486	270	540	**34**	1944	270	540
500	4	**5**	500	180	270	**35**	720	180	270
800	3	**6**	512	160	480	**36**	1152	160	480
900	4	**7**	576	80	560	**37**	1296	80	560
1000	3	**8**	600	300	600	**38**	1350	300	600
900	4	**9**	648	180	540	**39**	1458	180	540
500	3	**10**	720	216	324	**40**	1620	216	324
1100	4	**11**	726	330	660	**41**	2904	330	660
1000	3	**12**	800	200	600	**42**	1800	200	600
1200	4	**13**	864	360	720	**43**	1944	360	720
1100	3	**14**	900	100	700	**44**	1600	100	700
1200	4	**15**	968	220	660	**45**	2178	220	660
600	3	**16**	980	252	378	**46**	1280	252	378
700	4	**17**	1008	192	480	**47**	2268	192	480
1200	3	**18**	1014	390	780	**48**	2400	390	780
1100	4	**19**	1152	240	720	**49**	2592	240	720
1400	3	**20**	1176	420	840	**50**	2646	420	840
1200	4	**21**	1250	250	750	**51**	1800	250	750
700	3	**22**	1280	288	432	**52**	2880	288	432
1300	4	**23**	1296	120	840	**53**	2304	120	840
1400	3	**24**	1350	450	900	**54**	1944	450	900
1200	4	**25**	1352	260	780	**55**	3042	260	780
900	3	**26**	1372	224	560	**56**	5488	224	560
1300	4	**27**	1568	280	840	**57**	3528	280	840
800	3	**28**	1620	324	486	**58**	2880	324	486
1500	4	**29**	1764	140	980	**59**	784	140	980
1400	3	**30**	1800	300	900	**60**	3200	300	900

Пример условия Задачи 3 по ОЭТ:

В прибрежном посёлке прямоугольные участки площадью 300 м^2 расположены между рекой и дорогой по 240 руб./м, имеющей (через два участка в их 6-метровом разрыве) ответвления к причалам на берегу. От дороги и её ответвлений, а также друг от друга участки отделены забором по 80 руб./м, имеющим ведущие с дороги на участок ворота за 500 руб. длиной 4 м.



Определить размеры участков вдоль (l) и перпендикулярно (m) берегу, минимизирующие стоимость строительства дорог и заборов, вычислить эту стоимость (C), приходящуюся на один участок.

<u>Решение:</u> 1) $m = 300/l$

2) $C = (l-4)(80) + 500 + (l+6/2)(240) + m(1{,}5\times 80 + 240/2) =$
$= 320l + 900 + 72000/l \to min$ и достигает его, когда
$dC/dl = 320 - 72000/l^2 = 0 \quad l^2 = 72000/320 = 225 \quad l = 15$ м

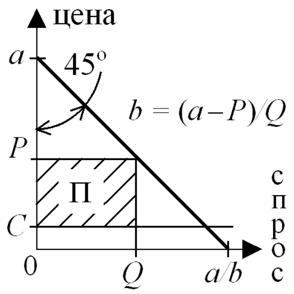
3) $m = 300/15 = 20$ м, $C = 320(15) + 900 + 72000/15 = 10500$ руб.

Ответ: $l = 15$ м, $m = 20$ м, $C = 10500$ руб.

Разрыв	Цена во-	Длина	Данные	Площадь	Цены, руб./м		Данные	Площадь	Цены, руб./м	
уч-ов, м	рот, руб.	ворот, м	№	уч-ка, м^2	дороги	забора	№	уч-ка, м^2	дороги	забора
6	500	4	**1**	108	180	60	**31**	192	180	60
5	700	5	**2**	120	200	100	**32**	270	200	100
6	1000	6	**3**	144	180	180	**33**	324	180	180
5	500	4	**4**	150	300	60	**34**	600	300	60
6	500	5	**5**	154	500	200	**35**	1386	500	200
5	1400	6	**6**	182	400	300	**36**	1638	400	300
6	900	4	**7**	192	300	100	**37**	432	300	100
5	600	5	**8**	216	300	60	**38**	486	300	60
6	800	6	**9**	224	500	300	**39**	504	500	300
5	700	4	**10**	256	240	240	**40**	576	240	240
6	600	5	**11**	270	300	150	**41**	480	300	150
5	500	6	**12**	280	400	100	**42**	630	400	100
6	700	4	**13**	294	300	60	**43**	1176	300	60
5	1200	5	**14**	360	300	200	**44**	810	300	200
6	300	6	**15**	400	180	180	**45**	900	180	180
5	600	4	**16**	432	450	150	**46**	972	450	150
6	300	5	**17**	486	360	72	**47**	864	360	72
5	400	6	**18**	504	150	90	**48**	896	150	90
6	1100	4	**19**	576	360	360	**49**	1024	360	360
5	1500	5	**20**	588	420	140	**50**	2352	420	140
6	800	6	**21**	600	500	100	**51**	2400	500	100
5	900	4	**22**	616	500	200	**52**	2464	500	200
6	700	5	**23**	630	600	150	**53**	1120	600	150
5	400	6	**24**	726	400	80	**54**	2904	400	80
6	1000	4	**25**	728	400	300	**55**	2912	400	300
5	500	5	**26**	768	240	80	**56**	1728	240	80
6	1900	6	**27**	784	420	420	**57**	1764	420	420
5	2100	4	**28**	900	450	450	**58**	2025	450	450
6	400	5	**29**	1200	300	100	**59**	1452	300	100
5	600	6	**30**	1728	360	120	**60**	768	360	120

Задачи контрольной № 1 по ОЭТ

Пример условия Задачи 4:



Товар, который перестают покупать при цене $a = 1000$ руб. за шт., продаётся в розницу по цене $P = 400$ руб. за шт. с интенсивностью $Q = 200$ шт. в день в соответствии с прямой линией спроса.

При себестоимости товара C = 100 руб. за шт. определить:

А. Равновесные сбыт ($Q_м$), цену ($P_м$) и прибыль ($П_м$) монопольного поставщика.

Б. Равновесные по Курно-Нэшу сбыт (q_1 и q_2), цену ($P_{1,2}$) и прибыль ($П_1$ и $П_2$) каждого из обоих поставщиков дуполистов.

В. Равновесные по Штакельбергу сбыт ($q_л$ и $q_п$), цену ($P_{л,п}$) и прибыль ($П_л$ и $П_п$) дуполиста-лидера и дуполиста-последователя.

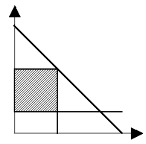
Г. Равновесные по Нэшу сбыт ($Q_{I,II}$), полную цену ($P_{I,II}$) и прибыль ($П_I$ и $П_{II}$) двухсторонних монополистов.

Решение:

А. 1) $b = (a - P)/Q = (1000 - 400)/200 = 3$ руб.×день за шт.^{2} , $P_м = a - bQ_м = 1000 - 3Q_м$

2) $П_м = (P_м - C)Q_м = (1000 - 3Q_м - 100)Q_м = 900Q_м - 3Q_м^2 \rightarrow max$ и достигает его,

когда $dП_м/dQ_м = 900 - 6Q_м = 0 \quad 6Q_м = 900 \quad Q_м = 150$ шт. в день



3) $P_м = 1000 - 3Q_м = 1000 - 3(150) = 550$ руб. за шт.

$П_м = (P_м - C)Q_м = (550 - 100)150 = 67500$ руб. в день

Ответ **А**: $Q_м = 150$ шт. в день, $P_м = 550$ руб. за шт., $П_м = 67500$ руб. в день.

Б. 1) $P_{1,2} = a - b(q_1 + q_2) = 1000 - 3(q_1 + q_2)$

$П_1 = (P_{1,2} - C)q_1 = (1000 - 3(q_1 + q_2) - 100)q_1 = 900q_1 - 3q_1^2 - 3q_1q_2 \rightarrow max$

и достигает его, когда $\partial П/\partial q_1 = 900 - 6q_1 - 3q_2 = 0 \quad 6q_1 = 900 - 3q_2 \quad q_1 = 150 - 0{,}5q_2$

2) $П_2 = (P_{1,2} - C)q_2 = (1000 - 3(q_1 + q_2) - 100)q_2 = 900q_2 - 3q_1q_2 - 3q_2^2 \rightarrow max$

и достигает его, когда $\partial П/\partial q_2 = 900 - 3q_1 - 6q_2 = 0 \quad 6q_2 = 900 - 3q_1 \quad q_2 = 150 - 0{,}5q_1$

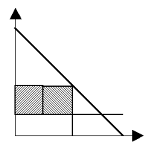
3) решая систему уравнений $\{ q_1 = 150 - 0{,}5q_2 ,\ q_2 = 150 - 0{,}5q_1 \}$ подстановкой,

$q_1 = 150 - 0{,}5(150 - 0{,}5q_1) = 75 + 0{,}25q_1 \quad 0{,}75q_1 = 75 \quad q_1 = 100$ шт. в день

$q_2 = 150 - 0{,}5q_1 = 150 - 0{,}5(100) = 100$ шт. в день $\quad P_{1,2} = 1000 - 3(100 + 100) = 400$ руб. за шт.

4) $П_1 = (P_{1,2} - C)q_1 = (400 - 100)100 = 30000$ руб. в день

$П_2 = (P_{1,2} - C)q_2 = (400 - 100)100 = 30000$ руб. в день



$П_1 + П_2 = 60000 < П_м = 67500$ руб. в день (проверка)

Ответ **Б**: $q_1 = q_2 = 100$ шт. в день, $P_{1,2} = 400$ руб. за шт., $П_1 = П_2 = 30000$ руб. в день.

В. 1) сбыт последователя ($q_п$) аналогично $q_2 = 150 - 0{,}5q_1$ (в равновесии Курно-Нэша) зависит от сбыта второго поставщика (лидера), т.е. $q_п = 150 - 0{,}5q_л$ и лидер это учитывает для максимизации своей прибыли при $P_{л,п} = a - b(q_л + q_п)$

$П_л = (P_{л,п} - C)q_л = (1000 - 3(q_л + (150 - 0{,}5q_л)) - 100)q_л = 450q_л - 1{,}5q_л^2 \rightarrow max$ и достигает его,

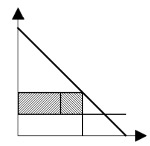
когда $dП_л/dq_л = 450 - 3q_л = 0 \quad 3q_л = 450 \quad q_л = 150$ шт. в день

$q_п = 150 - 0{,}5(150) = 75$ шт. в день – в 2 раза меньше $q_л$ и $Q_м = 150$ шт. в день (проверка)

2) $P_{\text{л,п}} = a - b(q_\text{л} + q_\text{п}) = 1000 - 3(150 + 75) = 325$ руб. за шт.

$\text{П}_\text{л} = (P_{\text{л,п}} - C)q_\text{л} = (325 - 100)150 = 33750$ руб. в день

$\text{П}_\text{п} = (325 - 100)75 = 16875$ руб. в день – в 4 раза меньше $\text{П}_\text{м}$ (проверка)



Ответ **В**: $q_\text{л} = 2q_\text{п} = 150$ шт. в день, $P_{\text{л,п}} = 325$ руб. за шт., $\text{П}_\text{л} = 2\text{П}_\text{п} = 33750$ руб. в день.

Г. 1) у двухсторонних монополистов полная цена $P_{\text{I,II}} = a - bQ_{\text{I,II}}$ (где $Q_{\text{I,II}}$ – единый сбыт) складывается из себестоимости $C = 100$ руб. за шт. и наценок p_I и p_II обоих монополистов,

т.о. $P_{\text{I,II}} = 1000 - 3Q_{\text{I,II}} = 100 + p_\text{I} + p_\text{II}$ $3Q_{\text{I,II}} = 900 - p_\text{I} - p_\text{II}$ $Q_{\text{I,II}} = 300 - (p_\text{I} + p_\text{II})/3$

$\text{П}_\text{I} = p_\text{I}Q_{\text{I,II}} = p_\text{I}(300 - (p_\text{I} + p_\text{II})/3) = 300p_\text{I} - p_\text{I}^2/3 - p_\text{I}p_\text{II}/3 \rightarrow max$ и достигает его, когда

$\partial\text{П}_\text{I}/\partial p_\text{I} = 300 - 2p_\text{I}/3 - p_\text{II}/3 = 0$ $2p_\text{I} = 900 - p_\text{II}$ $p_\text{I} = 450 - 0{,}5p_\text{II}$

2) $\text{П}_\text{II} = p_\text{II}Q_{\text{I,II}} = p_\text{II}(300 - (p_\text{I} + p_\text{II})/3) = 300p_\text{II} - p_\text{I}p_\text{II}/3 - p_\text{II}^2/3 \rightarrow max$ и достигает его, когда

$\partial\text{П}_\text{II}/\partial p_\text{II} = 300 - p_\text{I}/3 - 2p_\text{II}/3 = 0$ $2p_\text{II} = 900 - p_\text{I}$ $p_\text{II} = 450 - 0{,}5p_\text{I}$

3) решая систему уравнений $\{p_\text{I} = 450 - 0{,}5p_\text{II},\ p_\text{II} = 450 - 0{,}5p_\text{I}\}$ подстановкой,

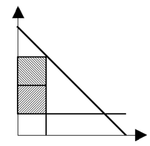
$p_\text{I} = 450 - 0{,}5(450 - 0{,}5p_\text{I}) = 225 + 0{,}25p_\text{I}$ $0{,}75p_\text{I} = 225$ $p_\text{I} = 300$ руб. за шт.

$p_\text{II} = 450 - 0{,}5p_\text{I} = 450 - 0{,}5(300) = 300$ руб. за шт. $P_{\text{I,II}} = 100 + 300 + 300 = 700$ руб. за шт.

$Q_{\text{I,II}} = 300 - (p_\text{I} + p_\text{II})/3 = 300 - (300 + 300)/3 = 100$ шт. в день

4) $\text{П}_\text{I} = p_\text{I}Q_{\text{I,II}} = 300 \times 100 = 30000$ руб. в день

$\text{П}_\text{II} = p_\text{II}Q_{\text{I,II}} = 300 \times 100 = 30000$ руб. в день



$\text{П}_\text{I} + \text{П}_\text{II} = 60000 < \text{П}_\text{м} = 67500$ руб. в день у монополии (проверка)

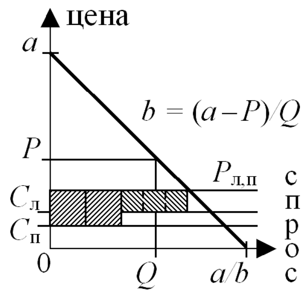
Ответ **Г**: $Q_{\text{I,II}} = 100$ шт. в день, $P_{\text{I,II}} = 700$ руб. за шт., $\text{П}_\text{I} = \text{П}_\text{II} = 30000$ руб. в день.

Исходные данные				
№	*a*	*P*	*Q*	*C*
1	1000	460	180	64
2	1000	440	280	88
3	1000	440	80	76
4	1000	440	160	76
5	1000	440	280	112
6	1000	450	275	136
7	1000	550	150	136
8	1000	400	150	136
9	1000	400	100	136
10	1000	550	100	136
11	1050	510	180	114
12	1050	490	280	138
13	1050	490	80	126
14	1050	490	160	126
15	1050	490	280	162
16	1050	500	275	186
17	1050	600	150	186
18	1050	450	150	186
19	1050	450	100	186
20	1050	600	100	186
21	1100	560	180	164
22	1100	540	280	188
23	1100	540	80	176
24	1100	540	160	176
25	1100	540	280	212
26	1100	550	275	236
27	1100	650	150	236
28	1100	500	150	236
29	1100	500	100	236
30	1100	650	100	236

Исходные данные				
№	*a*	*P*	*Q*	*C*
31	1150	610	180	214
32	1150	590	280	238
33	1150	590	80	226
34	1150	590	160	226
35	1150	590	280	262
36	1150	600	275	286
37	1150	700	150	286
38	1150	550	150	286
39	1150	550	100	286
40	1150	700	100	286
41	1200	660	180	264
42	1200	640	280	288
43	1200	640	80	276
44	1200	640	160	276
45	1200	640	280	312
46	1200	650	275	336
47	1200	750	150	336
48	1200	600	150	336
49	1200	600	100	336
50	1200	750	100	336
51	1250	710	180	314
52	1250	690	280	338
53	1250	690	80	326
54	1250	690	160	326
55	1250	690	280	362
56	1250	700	275	386
57	1250	800	150	386
58	1250	650	150	386
59	1250	650	100	386
60	1250	800	100	386

Исходные данные				
№	*a*	*P*	*Q*	*C*
61	1300	760	180	364
62	1300	740	280	388
63	1300	740	80	376
64	1300	740	160	376
65	1300	740	280	412
66	1300	750	275	436
67	1300	850	150	436
68	1300	700	150	436
69	1300	700	100	436
70	1300	850	100	436
71	1350	810	180	414
72	1350	790	280	438
73	1350	790	80	426
74	1350	790	160	426
75	1350	790	280	462
76	1350	800	275	486
77	1350	900	150	486
78	1350	750	150	486
79	1350	750	100	486
80	1350	900	100	486
81	1400	860	180	464
82	1400	840	280	488
83	1400	840	80	476
84	1400	840	160	476
85	1400	840	280	512
86	1400	850	275	536
87	1400	950	150	536
88	1400	800	150	536
89	1400	800	100	536
90	1400	950	100	536

Пример условия Задачи 5:



Товар, который перестают покупать при цене $a = 1000$ руб. за шт., продаётся в розницу по цене $P = 400$ руб. за шт. с интенсивностью $Q = 200$ шт. в день в соответствии с прямой линией спроса.

На рынке присутствует один претендующий на лидерство продавец с себестоимостью товара $C_л = 130$ руб. за шт. и $n = 2$ продавца, готовых быть последователями, с себестоимостью товара $C_п = 100$ руб. за шт.

Определить равновесные по Штакельбергу общий сбыт и цену ($Q_{л,п}$ и $P_{л,п}$), объёмы сбыта и прибыли продавцов-последователей ($q_п$ и $П_п$) и лидера ($q_л$ и $П_л$).

Решение:

1) $b = (a - P)/Q = (1000 - 400)/200 = 3$ руб.×день за шт.^{2}, $P_{л,п} = a - bQ_{л,п} = 1000 - 3(q_л + nq_п)$
сбыт последователя подстраивается под суммарный сбыт лидера и остальных последователей $Q_{-п} = q_л + (n-1)q_п = q_л + (2-1)q_п = q_л + q_п$ как постоянную величину
$П_п = (P_{л,п} - C_п)q_п = (1000 - 3(Q_{-п} + q_п) - 100)q_п = 900q_п - 3Q_{-п}q_п - 3q_п^2 \rightarrow max$ и достигает его, когда $\partial П_п/\partial q_п = 900 - 3Q_{-п} - 6q_п = 0$ $6q_п = 900 - 3Q_{-п} = 900 - 3(q_л + q_п)$
$9q_п = 900 - 3q_л$, т.о. $q_п = 100 - q_л/3$

2) лидер это учитывает для максимизации своей прибыли при $P_{л,п} = a - b(q_л + 2q_п)$
$П_л = (P_{л,п} - C_л)q_л = (1000 - 3(q_л + 2(100 - q_л/3)) - 130)q_л = 270q_л - q_л^2 \rightarrow max$ и достигает его, когда $dП_л/dq_л = 270 - 2q_л = 0$ $2q_л = 270$ $q_л = 135$ шт. в день
$q_п = 100 - 135/3 = 100 - 45 = 55$ шт. в день, что за вычетом $(C_л - C_п)/b = 10$ в 3 раза меньше $q_л$
$Q_{л,п} = 135 + 2 \times 55 = 245$ шт. в день, $P_{л,п} = 1000 - 3 \times 245 = 265$ руб. за шт.

3) $П_л = (P_{л,п} - C_л)q_л = (265 - 130)135 = 18225$ руб. в день
$П_п = (P_{л,п} - C_п)q_п = (265 - 100)55 = 9075$ руб. в день

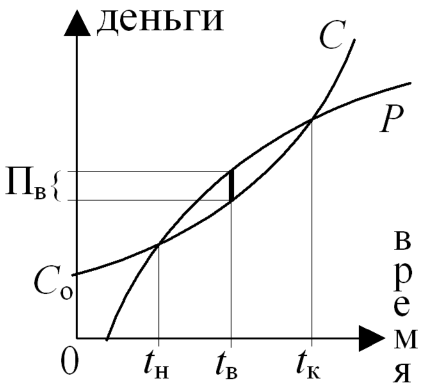
Ответ: $Q_{л,п} = 245$ шт. в день, $P_{л,п} = 265$ руб. за шт., $q_п = 55$ шт. в день, $П_п = 9075$ руб., в день
$q_л = (n+1)(q_п - (C_л - C_п)/b) = 135$ шт. в день (проверка), $П_л = 18225$ руб. в день.

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_л$	n	$C_п$
1	1000	460	180	94	2	64
2	1000	440	280	88	2	82
3	1000	440	80	76	2	55
4	1000	440	160	76	2	34
5	1000	440	280	112	2	100
6	1000	450	275	136	3	104
7	1000	550	150	136	3	112
8	1000	400	150	136	3	72
9	1000	400	100	136	3	88
10	1000	550	100	136	3	64
11	1050	510	180	144	4	135
12	1050	490	280	138	4	130
13	1050	490	80	126	4	70
14	1050	490	160	126	4	105
15	1050	490	280	162	4	100
16	1050	500	275	186	5	66
17	1050	600	150	186	5	150
18	1050	450	150	186	5	90
19	1050	450	100	186	5	114
20	1050	600	100	186	5	78
21	1100	560	180	176	6	155
22	1100	540	280	188	6	106
23	1100	540	80	176	6	71
24	1100	540	160	176	6	120
25	1100	540	280	212	6	204
26	1100	550	275	236	2	104
27	1100	650	150	236	2	218
28	1100	500	150	236	2	104
29	1100	500	100	236	2	200
30	1100	650	100	236	2	182

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_л$	n	$C_п$
31	1150	610	180	244	2	214
32	1150	590	280	238	2	232
33	1150	590	80	226	2	205
34	1150	590	160	226	2	184
35	1150	590	280	262	2	250
36	1150	600	275	286	3	254
37	1150	700	150	286	3	262
38	1150	550	150	286	3	222
39	1150	550	100	286	3	238
40	1150	700	100	286	3	214
41	1200	660	180	294	4	285
42	1200	640	280	288	4	280
43	1200	640	80	276	4	220
44	1200	640	160	276	4	255
45	1200	640	280	312	4	250
46	1200	650	275	336	5	216
47	1200	750	150	336	5	300
48	1200	600	150	336	5	240
49	1200	600	100	336	5	264
50	1200	750	100	336	5	228
51	1250	710	180	326	6	305
52	1250	690	280	338	6	256
53	1250	690	80	326	6	221
54	1250	690	160	326	6	270
55	1250	690	280	362	6	354
56	1250	700	275	386	2	254
57	1250	800	150	386	2	368
58	1250	650	150	386	2	254
59	1250	650	100	386	2	350
60	1250	800	100	386	2	332

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_л$	n	$C_п$
61	1300	760	180	394	2	364
62	1300	740	280	388	2	382
63	1300	740	80	376	2	355
64	1300	740	160	376	2	334
65	1300	740	280	412	2	400
66	1300	750	275	436	3	404
67	1300	850	150	436	3	412
68	1300	700	150	436	3	372
69	1300	700	100	436	3	388
70	1300	850	100	436	3	364
71	1350	810	180	444	4	435
72	1350	790	280	438	4	430
73	1350	790	80	426	4	370
74	1350	790	160	426	4	405
75	1350	790	280	462	4	400
76	1350	800	275	486	5	366
77	1350	900	150	486	5	450
78	1350	750	150	486	5	390
79	1350	750	100	486	5	414
80	1350	900	100	486	5	378
81	1400	860	180	476	6	455
82	1400	840	280	488	6	406
83	1400	840	80	476	6	371
84	1400	840	160	476	6	420
85	1400	840	280	512	6	504
86	1400	850	275	536	2	404
87	1400	950	150	536	2	518
88	1400	800	150	536	2	404
89	1400	800	100	536	2	500
90	1400	950	100	536	2	482

Пример условия Задачи 6:



Сумма P, по которой можно продать лес под вырубку, достигает $P_1 = 675$ тыс. руб. через $t_1 = 30$ лет и $P_2 = 775$ тыс. руб. через $t_2 = 40$ лет после его посева в ценах, действовавших во время посева. Эта сумма растёт с течением времени благодаря росту леса и замедляет скорость своего роста в $a = 1{,}5$ раза за 10 лет.

Посев леса был осуществлён за $C_о = 200$ тыс. руб., взятые в кредит, проценты по которому причисляются к сумме долга C и за 10 лет составляют $b = 200\%$ от этой суммы, начисленной к началу 10-летия.

Определить начало ($t_н$) и конец ($t_к$) периода безубыточности, дату ($t_в$) продажи леса под вырубку и возврата кредита с максимальной выручкой, а также величину этой выручки ($П_в$) в ценах на дату посева, если действует постоянная инфляция в $i = 100\%$ за 10-летие.

Решение:

1) $dP/dt = k_о/1{,}5^{0{,}1t}$, где $k_о$ – скорость роста суммы P в момент посева (при $t = 0$)

$$\int dP = k_о \int 1{,}5^{-0{,}1t}\,dt + H = -k_о/(0{,}1 \times \ln 1{,}5)\int e^{-0{,}1\ln 1{,}5t}\,d(-0{,}1 \times \ln 1{,}5t) + H$$

$P = -k_о/(0{,}1 \times \ln 1{,}5)1{,}5^{-0{,}1t} + H$, где H – постоянная интегрирования

определим $K = k_о/(0{,}1 \times \ln 1{,}5)$ и Н, зная, что при $t_1 = 30$ лет $P_1 = 675$ тыс. руб., а при $t_2 = 40$ лет $P_2 = 775$ тыс. руб., т.е. имея систему из 2 уравнений типа $P = H - K/1{,}5^{0{,}1t}$

$\{ 775 = H - K/1{,}5^{0{,}1(40)} = H - K/1{,}5^4$ и $675 = H - K/1{,}5^{0{,}1(30)} = H - K/1{,}5^3 \}$ и вычтя одно из другого, получим $775 - 675 = 100 = -K/1{,}5^4 + K/1{,}5^3 = -K(1 - 1{,}5)/1{,}5^4 = 0{,}5K/1{,}5^4$

$K = 100 \times 1{,}5^4/0{,}5 = 200 \times 1{,}5^4 = 1012{,}5$

$H = 775 + K/1{,}5^{0{,}1(40)} = 775 + 1012{,}5/1{,}5^4 = 775 + 200 = 975$ тыс. руб.

т.о. $P = 975 - 1012{,}5/1{,}5^{0{,}1t}$ – функция дохода от продажи леса под вырубку

2) $(1+200\%)/(1+100\%) = (1+200/100)/(1+100/100) = 3/2 = 1{,}5$ раза за 10-летие.

$C = C_о \times 1{,}5^{0{,}1t} = 200 \times 1{,}5^{0{,}1t}$ – функция стоимости возврата долга по кредиту в ценах, действовавших в момент его получения

$П = P - C = 975 - 1012{,}5/1{,}5^{0{,}1t} - 200 \times 1{,}5^{0{,}1t}$ – функция выручки от продажи леса под вырубку в момент t с возвратом долга, $П \to max$ и достигает его в оптимальный момент вырубки и возврата $t_в$, когда

$d П/dt_в = -1012{,}5(-0{,}1 \times \ln 1{,}5)/1{,}5^{0{,}1t_в} - 200(0{,}1 \times \ln 1{,}5)1{,}5^{0{,}1t_в} = \ln 1{,}5(101{,}25/1{,}5^{0{,}1t_в} - 20 \times 1{,}5^{0{,}1t_в}) = 0$

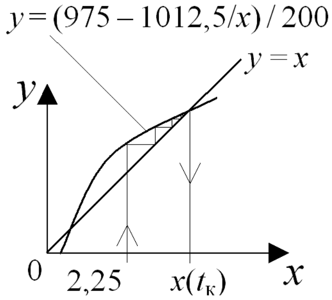
$101{,}25/1{,}5^{0{,}1t_в} = 20 \times 1{,}5^{0{,}1t_в}$ $101{,}25/20 = 5{,}0625 = 1{,}5^{0{,}2t_в}$ $0{,}2t_в = \ln 5{,}0625/\ln 1{,}5 = 4$

$t_в = 4/0{,}2 = 20$ лет с даты посева

$П_в = 975 - 1012{,}5/1{,}5^{0{,}1(20)} - 200 \times 1{,}5^{0{,}1(20)} = 975 - 450 - 450 = 75$ тыс. руб.

3) в начале и конце периода безубыточности $П = 975 - 1012{,}5/1{,}5^{0{,}1t} - 200 \times 1{,}5^{0{,}1t} = 0$

заменив переменную на $x = 1{,}5^{0{,}1t}$, имеем уравнение $x = (975 - 1012{,}5/x)/200$ для итерационного подбора одной из границ периода безубыточности путём повторяющейся подстановки в правую часть данного итерационного уравнения значения x, вычисленного с помощью этой правой части, начиная с $x = 1{,}5^{0{,}1t_в} = 1{,}5^{0{,}1(20)} = 2{,}25$ и до тех пор, пока значения x и $(975 - 1012{,}5/x)/200$ продолжают меняться и не сравняются



№	x	$(975-1012{,}5/x)/200$
1	2,25	2,625
2	2,625	2,946428541…
3	2,946428541…	3,16818182…
4	3,16818182…	3,271328294…
…	…	…
28	3,37499999…	3,375
29	3,375	3,375

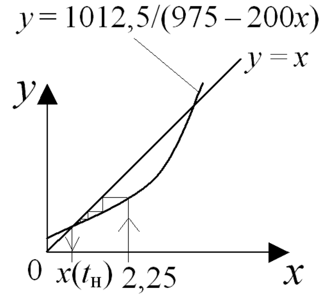
т.к. результат $3{,}375 > 2{,}25$, то в <u>конце</u> периода безубыточности

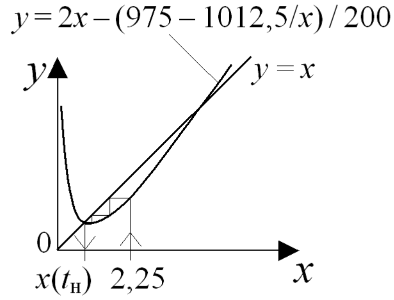
$$1{,}5^{0{,}1t_к}=3{,}375$$

$0{,}1t_к=\ln 3{,}375/\ln 1{,}5=3$

$t_к=30$ лет с даты посева

4) для сходимости итераций к началу периода безубыточности преобразуем итерационное уравнение в обратное ему $x=1012{,}5/(975-200x)$ с симметричным графиком или, вычтя обе его части из $2x$, к $2x-x=x=2x-(975-1012{,}5/x)/200$, и, начав с $x=2{,}25$, получим





№	x	$2x-(975-1012{,}5/x)/200$
1	2,25	1,875
2	1,875	1,575
3	1,575	1,489285714…
4	1,489285714…	1,502852004…
…	…	…
16	1,49999999…	1,5
17	1,5	1,5

т.к. результат $1{,}5 < 2{,}25$, то в <u>начале</u> периода безубыточности $1{,}5^{0{,}1t_н}=1{,}5$

$0{,}1t_н=\ln 1{,}5/\ln 1{,}5=1 \quad t_н=10$ лет с даты посева

Ответ: $t_н=10$ лет, $t_к=30$ лет, $t_в=20$ лет с даты посева, $П_в=75$ тыс. руб.

Исходные данные

№	P_1	t_1	P_2	t_2	a	C_o	b	i
1	525	30	705	50	1,25	256	150	100
2	315	20	423	40	1,25	192	155	104
3	500	30	564	40	1,25	256	160	108
4	525	20	769	50	1,25	320	170	116
5	1161	30	1971	50	1,5	192	170	80
6	1296	40	5913	70	1,5	256	185	90
7	1080	30	1240	40	1,5	320	188	92
8	1240	20	18600	50	2	310	150	25
9	2360	30	11505	80	2	295	180	40
10	1260	20	5670	50	2	315	170	35
11	1950	20	2925	40	2	325	190	45
12	560	10	8400	40	2	280	200	50
13	1600	20	10960	50	2,5	256	200	20
14	800	20	19550	30	2,5	128	205	22
15	3000	30	18750	50	2,5	192	215	26
16	400	20	769	60	1,25	256	155	104
17	240	10	375	30	1,25	192	150	100
18	420	20	500	30	1,25	256	170	116
19	625	30	705	40	1,25	320	160	108
20	432	20	2187	60	1,5	192	185	90
21	1296	40	4941	60	1,5	256	188	92
22	840	20	1080	30	1,5	320	170	80
23	1240	20	18600	50	2	310	180	40
24	2360	30	11210	70	2	295	170	35
25	1260	20	5985	60	2	315	150	25
26	650	10	2600	30	2	325	200	50
27	560	10	8960	50	2	280	190	45
28	1600	20	10000	40	2,5	256	205	22
29	1200	20	29325	30	2,5	192	215	26
30	2500	30	11875	40	2,5	160	200	20

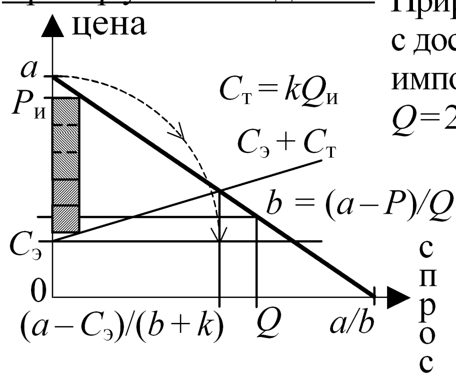
Исходные данные

№	P_1	t_1	P_2	t_2	a	C_o	b	i
31	1050	30	1410	50	1,25	512	150	100
32	630	20	846	40	1,25	384	155	104
33	1000	30	1128	40	1,25	512	160	108
34	1050	20	1538	50	1,25	640	170	116
35	2322	30	3942	50	1,5	384	170	80
36	2592	40	11826	70	1,5	512	185	90
37	2160	30	2480	40	1,5	640	188	92
38	2480	20	37200	50	2	620	150	25
39	4720	30	23010	80	2	590	180	40
40	2520	20	11340	50	2	630	170	35
41	3900	20	5850	40	2	650	190	45
42	1120	10	16800	40	2	560	200	50
43	3200	20	21920	50	2,5	512	200	20
44	1600	20	39100	30	2,5	256	205	22
45	6000	30	37500	50	2,5	384	215	26
46	800	20	1538	60	1,25	512	155	104
47	480	10	750	30	1,25	384	150	100
48	840	20	1000	30	1,25	512	170	116
49	1250	30	1410	40	1,25	640	160	108
50	864	20	4374	60	1,5	384	185	90
51	2592	40	9882	60	1,5	512	188	92
52	1680	20	2160	30	1,5	640	170	80
53	2480	20	37200	50	2	620	180	40
54	4720	30	22420	70	2	590	170	35
55	2520	20	11970	60	2	630	150	25
56	1300	10	5200	30	2	650	200	50
57	1120	10	17920	50	2	560	190	45
58	3200	20	20000	40	2,5	512	205	22
59	2400	20	58650	30	2,5	384	215	26
60	5000	30	23750	40	2,5	320	200	20

Исходные данные

№	P_1	t_1	P_2	t_2	a	C_o	b	i
61	1575	30	2115	50	1,25	768	150	100
62	945	20	1269	40	1,25	576	155	104
63	1500	30	1692	40	1,25	768	160	108
64	1575	20	2307	50	1,25	960	170	116
65	3483	30	5913	50	1,5	576	170	80
66	3888	40	17739	70	1,5	768	185	90
67	3240	30	3720	40	1,5	960	188	92
68	3720	20	55800	50	2	930	150	25
69	7080	30	34515	80	2	885	180	40
70	3780	20	17010	50	2	945	170	35
71	5850	20	8775	40	2	975	190	45
72	1680	10	25200	40	2	840	200	50
73	4800	20	32880	50	2,5	768	200	20
74	2400	20	58650	30	2,5	384	205	22
75	9000	30	56250	50	2,5	576	215	26
76	1200	20	2307	60	1,25	768	155	104
77	720	10	1125	30	1,25	576	150	100
78	1260	20	1500	30	1,25	768	170	116
79	1875	30	2115	40	1,25	960	160	108
80	1296	20	6561	60	1,5	576	185	90
81	3888	40	14823	60	1,5	768	188	92
82	2520	20	3240	30	1,5	960	170	80
83	3720	20	55800	50	2	930	180	40
84	7080	30	33630	70	2	885	170	35
85	3780	20	17955	60	2	945	150	25
86	1950	10	7800	30	2	975	200	50
87	1680	10	26880	50	2	840	190	45
88	4800	20	30000	40	2,5	768	205	22
89	3600	20	87975	30	2,5	576	215	26
90	7500	30	35625	40	2,5	480	200	20

Пример условия Задачи 7:



Природный газ, который перестают импортировать при цене с доставкой $a = 1000$ руб. за тыс. м^3, покупается страной импортёром по цене $P = 400$ руб. за тыс. м^3 с интенсивностью $Q = 200$ тыс. м^3 в час в соответствии с прямой линией спроса.

Газ покупается в стране экспортёре по цене $C_э = 160$ руб. за тыс. м^3 и поступает к импортёру по трубопроводу, проложенному через $m = 3$ страны транзитёра.

Себестоимость транзита одной тыс. м^3 газа пропорциональна интенсивности транзита с коэффициентом $k = 2$ руб.хчас за млн. м^6.

Страны транзитёры являются монополистами своих участков трубопровода, который представляет собой многостороннюю монополию. Один из транзитёров претендует на лидерство, завышая транзитную пошлину на своём участке.

Считая остальных транзитёров последователями, определить:

А. Равновесные значения интенсивности и цены импорта ($Q_и$ и $P_и$), транзитные пошлины и поступления от транзита лидера ($p_л$ и $П_л$) и одного последователя ($p_п$ и $П_п$).

Б. Величину отношения транзитных пошлин лидера и последователя ($p_{лл}/p_{пп}$), при превышении которой лидерство действует в ущерб лидеру.

Решение:

А. 1) $b = (a - P)/Q = (1000 - 400)/200 = 3$ руб.×час за млн. м^6,

$C_т = kQ_и = 2Q_и$ – функция себестоимости транзита 1 тыс. м^3 газа,

где $Q_и$ – интенсивность импорта с помощью данного транзита

2) у многосторонних монополистов полная цена складывается из цены экспорта, себестоимости транзита и транзитных пошлин всех монополистов (лидера и всех последователей) $P_и = C_э + C_т + p_л + (m-1)\,p_п = 160 + 2Q_и + p_л + 2p_п$,

а т.к. $P_и = a - bQ_и = 1000 - 3Q_и$, то $160 + 2Q_и + p_л + 2p_п = 1000 - 3Q_и$ и

$p_л + 2p_п = 840 - 5Q_и$, а $Q_и = (840 - (2p_п + p_л))/5$

3) пошлина последователя подстраивается под сумму пошлин лидера и остальных последователей, составляющую $P_{-п} = p_л + (m-2)\,p_п = p_л + p_п = 840 - 5Q_и - p_п$, отсюда

$Q_и = (840 - (p_п + P_{-п}))/5$ и поступления последователя от транзита

$П_п = p_пQ_и = p_п(840 - (p_п + P_{-п}))/5 = 168p_п - p_п^2/5 - p_пP_{-п}/5 \rightarrow max$ и достигают его, когда

$\partial П_п/\partial p_п = 168 - 2p_п/5 - P_{-п}/5 = 0 \quad 2p_п = 840 - P_{-п}$

$p_п = 420 - 0{,}5P_{-п} = 420 - 0{,}5(\,p_л + (m-2)\,p_п\,) = 420 - 0{,}5p_л - 0{,}5p_п \quad 1{,}5p_п = 420 - 0{,}5p_л$

$p_п = 280 - p_л/3$, т.о. $Q_и = (840 - (2p_п + p_л))/5 = (840 - 2(280 - p_л/3) - p_л)/5$

$Q_и = (840 - 560 + 2p_л/3 - p_л)/5 = (280 - p_л/3)/5 = p_п/5$

4) лидер это учитывает для максимизации своих поступлений

$П_л = p_лQ_и = p_л(280 - p_л/3)/5 = (280p_л - p_л^2/3)/5 \rightarrow max$ и достигают его, когда

$dП_л/dp_л = (280 - 2p_л/3)/5 = 0 \quad 2p_л/3 = 280 \quad p_л = 420$ руб. за тыс. м^3

$Q_и = (280 - p_л/3)/5 = (280 - 420/3)/5 = 140/5 = 28$ тыс. м^3 в час, $P_и = 1000 - 3Q_и$

$P_и = 1000 - 3(28) = 916$ руб. за тыс. м^3, $p_п = 280 - p_л/3 = 280 - 420/3 = 140$ руб. за тыс. м^3

$П_л = p_лQ_и = 420 \times 28 = 11760$ руб. в час, $П_п = p_пQ_и = p_п^2/5 = 140^2/5 = 3920$ руб. в час

Ответ **А**: $Q_и = 28$ тыс. м^3 в час, $P_и = 916$ руб. за тыс. м^3, $p_л = 420$ руб. за тыс. м^3,

$П_л = 11760$ руб. в час, $p_п = p_л/m = 140$ руб. за тыс. м^3 (проверка), $П_п = 3920$ руб. в час.

Б. 1) лидерство начинает наносить ущерб лидеру, когда его поступления от транзита станут ниже поступлений транзитёра в случае равновесия многосторонней монополии по Нэшу, при котором все транзитёры ведут себя как последователи, и транзитная пошлина $p_{\text{Н}}$ каждого из них зависит от суммы пошлин остальных $P_{\text{-п}}$, аналогично **А.** 3), как $p_{\text{Н}} = 420 - 0{,}5P_{\text{-п}}$

при отсутствии лидерства $P_{\text{-п}} = (m-1)p_{\text{Н}} = 2p_{\text{Н}}$ $\quad p_{\text{Н}} = 420 - 0{,}5(2p_{\text{Н}})$ $\quad p_{\text{Н}} = 210$ руб. за тыс. м^3

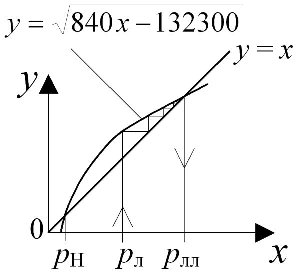
аналогично **А.** 4), $\Pi_{\text{Н}} = p_{\text{Н}}^2/5 = 210^2/5 = 8820 < \Pi_{\text{л}} = 11760$ руб. в час (проверка)

т.о. лидерство перестаёт приносить эффект лидеру из-за его завышенной транзитной пошлины $p_{\text{лл}}$, но ещё не наносит ущерб, если его поступления $\Pi_{\text{лл}} = \Pi_{\text{Н}} = 8820$ руб. в час

2) аналогично **А.** 3), $p_{\text{пп}} = 280 - p_{\text{лл}}/3$, а интенсивность их транзита $Q_{\text{т}} = p_{\text{пп}}/5$

т.о. $\Pi_{\text{лл}} = p_{\text{лл}}Q_{\text{т}} = p_{\text{лл}}p_{\text{пп}}/5 = p_{\text{лл}}(280 - p_{\text{лл}}/3)/5 = 56p_{\text{лл}} - p_{\text{лл}}^2/15 = 8820$

$p_{\text{лл}}^2 - 56\times15p_{\text{лл}} + 8820\times15 = 0$ $\quad p_{\text{лл}}^2 - 840p_{\text{лл}} + 132300 = 0$ – квадратное уравнение, меньший корень которого ($p_{\text{Н}} = 210$) нам известен, а больший может быть подобран многократным вычислением правой части итерационного уравнения вида $p_{\text{лл}} = \sqrt{840p_{лл} - 132300}$ с подстановкой в правую часть вычисленного т.о. значения в качестве аргумента, начиная с $p_{\text{л}} = 420$, соответствующего оптимальному лидерству



№	x	$\sqrt{840x - 132300}$
1	420	469,5742753…
2	469,5742753…	511,9984289…
3	511,9984289…	545,6910118…
4	545,6910118…	571,0345435…
…	…	…
56	629,9999999…	630
57	630	630

т.к. результат 630 > 420, то величина транзитной пошлины, выше которой лидерство наносит ущерб лидеру, составляет $p_{\text{лл}} = 630$ руб. за тыс. м^3

$p_{\text{пп}} = 280 - p_{\text{лл}}/3 = 280 - 630/3 = 280 - 210 = 70$ руб. за тыс. м^3

$p_{\text{лл}}/p_{\text{пп}} = 630/70 = 9 = m^2$ (проверка) Ответ **Б**: $p_{\text{лл}}/p_{\text{пп}} = 9$.

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_э$	m	k
1	1000	460	180	160	4	2
2	1000	440	280	88	4	4
3	1000	440	140	200	4	1
4	1000	450	275	200	4	3
5	1000	440	280	112	4	1
6	1000	450	275	136	3	2
7	1000	550	150	136	3	3
8	1000	400	150	136	3	4
9	1000	400	100	136	3	2
10	1000	550	90	136	3	3
11	1050	510	180	210	4	2
12	1050	490	280	138	4	4
13	1050	490	140	250	4	1
14	1050	500	275	250	4	3
15	1050	490	280	162	4	1
16	1050	500	275	186	3	2
17	1050	600	150	186	3	3
18	1050	450	150	186	3	4
19	1050	450	100	186	3	2
20	1050	600	90	186	3	3
21	1100	560	180	260	4	2
22	1100	540	280	188	4	4
23	1100	540	140	300	4	1
24	1100	550	275	300	4	3
25	1100	540	280	212	4	1
26	1100	550	275	236	3	2
27	1100	650	150	236	3	3
28	1100	500	150	236	3	4
29	1100	500	100	236	3	2
30	1100	650	90	236	3	3

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_э$	m	k
31	1150	610	180	310	4	2
32	1150	590	280	238	4	4
33	1150	590	140	350	4	1
34	1150	600	275	350	4	3
35	1150	590	280	262	4	1
36	1150	600	275	286	3	2
37	1150	700	150	286	3	3
38	1150	550	150	286	3	4
39	1150	550	100	286	3	2
40	1150	700	90	286	3	3
41	1200	660	180	360	4	2
42	1200	640	280	288	4	4
43	1200	640	140	400	4	1
44	1200	650	275	400	4	3
45	1200	640	280	312	4	1
46	1200	650	275	336	3	2
47	1200	750	150	336	3	3
48	1200	600	150	336	3	4
49	1200	600	100	336	3	2
50	1200	750	90	336	3	3
51	1250	710	180	410	4	2
52	1250	690	280	338	4	4
53	1250	690	140	450	4	1
54	1250	700	275	450	4	3
55	1250	690	280	362	4	1
56	1250	700	275	386	3	2
57	1250	800	150	386	3	3
58	1250	650	150	386	3	4
59	1250	650	100	386	3	2
60	1250	800	90	386	3	3

Исходные данные						
№	a	P	Q	$C_э$	m	k
61	1300	760	180	460	4	2
62	1300	740	280	388	4	4
63	1300	740	140	500	4	1
64	1300	750	275	500	4	3
65	1300	740	280	412	4	1
66	1300	750	275	436	3	2
67	1300	850	150	436	3	3
68	1300	700	150	436	3	4
69	1300	700	100	436	3	2
70	1300	850	90	436	3	3
71	1350	810	180	510	4	2
72	1350	790	280	438	4	4
73	1350	790	140	550	4	1
74	1350	800	275	550	4	3
75	1350	790	280	462	4	1
76	1350	800	275	486	3	2
77	1350	900	150	486	3	3
78	1350	750	150	486	3	4
79	1350	750	100	486	3	2
80	1350	900	90	486	3	3
81	1400	860	180	560	4	2
82	1400	840	280	488	4	4
83	1400	840	140	600	4	1
84	1400	850	275	600	4	3
85	1400	840	280	512	4	1
86	1400	850	275	536	3	2
87	1400	950	150	536	3	3
88	1400	800	150	536	3	4
89	1400	800	100	536	3	2
90	1400	950	90	536	3	3

Задачи контрольной № 3 по ОЭТ

Пример условия Задачи 8: Банк, когда инвестирует жилищное строительство, сравнивает инвестиционные программы по минимуму целевой функции $T^{\text{В}}/C \rightarrow min$, представляющей собой возведённый в степень В и делённый на общие затраты C срок окупаемости T, исчисляемый с даты завершения жилищного строительства по выбранной инвестиционной программе.

Показатель степени В отражает допустимую для данного банка степень проявления общеэкономического Закона убывающей доходности – допустимую эластичность затрат по сроку их окупаемости (при равной (В – 1)/В допустимой эластичности эффекта по затратам). При вложениях в жилищное строительство этот показатель определяется банком по формуле $\text{В} = 1 + \log_{Tx/Tz}[(K^{Tx/2} - 1)/(K^{Tz/2} - 1)]$,

где $T_X/2$ и $T_Z/2$ – продолжительности строительства, равные половинам сроков окупаемости выбираемых для попарного сравнения инвестиционных программ X и Z, а $K = (1+b)/(1+i)$ – определённая по формуле Ирвинга Фишера и увеличенная на единицу реальная ставка доходности вкладчиков банка при проценте по вкладам $b = 2{,}01\%$ в месяц и при ожидаемой (во время строительства и окупаемости) инфляции $i = 1\%$ в месяц.

Инвестиционные программы формируются из двух вариантов жилой застройки участков одинаковой формы и площади – пригородного посёлка и городского квартала – с затратностью, соответственно, $C_m = 5$ млн. р. и $C_n = 100$ млн. р. при окупаемости за $T_m = 10$ и $T_n = 50$ месяцев.

Строительство m посёлков и n кварталов по программе должно начинаться одновременно на всех участках, причём общее количество этих участков $m + n = 4$ шт.

Определить оптимальное по меркам банка сочетание проектов m (посёлков) и n (кварталов) в программе, общие затраты на неё и срок её окупаемости.

Решение:

1) $K = (1+b)/(1+i) = (1+2{,}01\%)/(1+1\%) = (1+0{,}0201)/(1+0{,}01) = 1{,}0201/1{,}01 = 1{,}01$

допустим, что $m = n = 4/2 = 2$ шт., и выберем этот вариант программы в качестве эталонного (Z) для попарного сравнения с каждым из возможных (X)

затраты на проекты суммируются $C = mC_m + nC_n$ $\quad C_Z = 2C_m + 2C_n = 2(5+100) = 210$ млн. руб.

$C_X = mC_m + (4-m)C_n = 5m + 100(4-m) = 400 - 95m$

сроки окупаемости проектов программы взвешено гармонически усредняются, и затраты выступают в качестве весов при усреднении

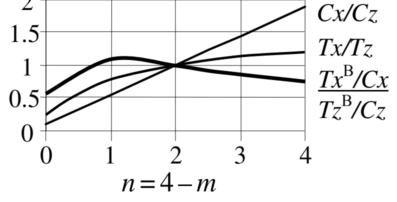
$$T = \frac{C}{\dfrac{mC_m}{T_m} + \dfrac{nC_n}{T_n}}$$

$$T_Z = \frac{210}{\dfrac{2\times5}{10} + \dfrac{2\times100}{50}} = \frac{210}{1+4} = 42 \text{ мес.} \qquad T_X = \frac{5m + 100(4-m)}{\dfrac{5m}{10} + \dfrac{100(4-m)}{50}} = \frac{400-95m}{\dfrac{400-75m}{50}} = \frac{800-190m}{16-3m}$$

2) $\text{В} = 1 + \log_{Tx/Tz}[(K^{Tx/2} - 1)/(K^{Tz/2} - 1)] = 1 + \ln[(1{,}01^{Tx/2} - 1)/(1{,}01^{21} - 1)]\,/\ln(T_X/42)$, но при $T_X = T_Z = 42$ второе слагаемое данной суммы есть неопределённость типа 0/0. В этом случае вычисляем $\text{В} = 1 + \lim_{Tx\to Tz}\{\ln[(1{,}01^{Tx/2} - 1)/(1{,}01^{21} - 1)]\,/\ln(T_X/42)\} = 1 + \{d[\ln(1{,}01^{Tx/2} - 1) - \ln(1{,}01^{21} - 1)]/dT_X\}/$ $/[d(\ln T_X - \ln 42)/dT_X] = 1 + 0{,}5T_X\, 1{,}01^{Tx/2}(\ln 1{,}01)/(1{,}01^{Tx/2} - 1)$, что применимо при любых $T_X = T_Z$.

3) заполним таблицу значений целевой функции и входящих в неё параметров для всех возможных инвестиционных программ X и выполним их сравнение с выбранной в качестве эталона программой Z, обозначив в таблице результаты сравнения знаками <, >, = и учитывая, что значение целевой функции $T^{\text{В}}/C \rightarrow min$ тем лучше, чем оно меньше

Z	X m, n	C_X млн. руб.	T_X месяцы	В	$T_X{}^{\text{В}}/C_X$		$T_Z{}^{\text{В}}/C_Z$
	4 0	20	10	2,0566644	5,69684448	<	10,3814894
	3 1	115	32,8571429	2,0955153	13,1045818	>	12,0039589
	2 2	210	42	2,1081144	12,5827605	=	12,5827605
	1 3	305	46,9230769	2,1145587	11,2187653	<	12,8895183
	0 4	400	50	2,1184896	9,93551327	<	13,0802926



из таблицы видно, что выбранная в качестве эталона для сравнения программа Z с двумя посёлками и двумя кварталами ($m=n=2$) равноценна самой себе (проверка) и хуже (т.к. по $T^{\text{В}}/C$ больше) всех прочих инвестиционных программ, кроме варианта программы с тремя посёлками и одним кварталом ($m=3$, $n=1$), что следует признать самым худшим;

4) выполним взаимное сравнение двух программ ($m=4$, $n=0$ и $m=0$, $n=4$), наиболее сильно отличающихся в лучшую сторону от ранее выбранной в качестве эталона Z; теперь за Z будем брать (для проверки) каждую из сравниваемых программ по очереди

Z	X m, n	C_X млн. руб.	T_X месяцы	В	$T_X^{\text{В}}/C_X$		$T_Z^{\text{В}}/C_Z$
	4 0	20	10	2,025082088	5,29726979	=	5,29726979
	0 4	400	50	2,063362003	8,00811239	>	5,78538156
	4 0	20	10	2,063362003	5,78538156	<	8,00811239
	0 4	400	50	2,129530548	10,3740547	=	10,3740547

т.о. инвестиционная программа с 4 посёлками лучше программы с 4 кварталами и всех других программ, сочетающих посёлки с кварталами на 4 участках

Ответ: оптимальное сочетание $m=4$, $n=0$, $C=20$ млн. руб., $T=10$ месяцев

Исходные данные

№	C_m	C_n	T_m	T_n	$m+n$	b	i
1	4	24	12	24	4	4.04	2
2	5	100	5	25	4	6.09	3
3	6	18	12	24	4	8.16	4
4	7	30	12	24	4	3.02	1
5	8	16	14	21	4	5.06	3
6	9	27	14	21	4	5.04	1
7	10	120	12	24	4	9.20	5
8	11	66	10	15	4	6.08	4
9	12	72	30	48	4	7.10	5
10	13	195	8	40	4	4.03	1
11	6	36	12	24	4	7.12	4
12	7	140	10	50	4	8.12	6
13	8	24	12	24	4	9.14	7
14	9	30	12	24	4	8.15	5
15	10	20	14	21	4	9.18	6
16	11	33	14	21	4	4.04	2
17	12	120	12	24	4	6.09	3
18	13	78	10	15	4	8.16	4
19	14	84	30	48	4	3.02	1
20	15	225	8	40	4	5.06	3
21	8	24	14	21	4	5.04	1
22	9	108	12	24	4	9.20	5
23	10	60	10	15	4	6.08	4
24	11	22	30	48	4	7.10	5
25	12	180	8	40	4	4.03	1
26	13	91	9	18	4	7.12	4
27	14	140	10	50	4	8.12	6
28	15	45	12	24	4	9.14	7
29	16	48	36	72	4	8.15	5
30	17	34	14	21	4	9.18	6

Исходные данные

№	C_m	C_n	T_m	T_n	$m+n$	b	i
31	4	48	12	24	4	4.04	2
32	5	100	15	75	4	7.12	4
33	6	36	14	28	4	8.16	4
34	7	140	15	75	4	3.02	1
35	8	24	30	60	4	5.06	3
36	9	30	24	48	4	5.04	1
37	10	20	28	42	4	9.20	5
38	11	33	42	63	4	6.08	4
39	12	120	16	32	4	7.10	5
40	13	78	30	45	4	4.03	1
41	6	18	18	36	4	7.12	4
42	7	30	36	72	4	8.12	6
43	8	16	35	60	4	9.14	7
44	9	27	42	63	4	8.15	5
45	10	120	15	40	4	9.18	6
46	11	66	20	30	4	4.04	2
47	12	72	15	24	4	6.09	3
48	13	195	4	20	4	8.16	4
49	14	84	15	24	4	8.12	6
50	15	225	12	60	4	9.14	7
51	8	20	28	42	4	5.04	1
52	9	108	30	60	4	8.15	5
53	10	60	30	45	4	9.18	6
54	11	22	15	24	4	7.10	5
55	12	180	9	36	4	4.03	1
56	13	91	18	36	4	6.09	3
57	14	140	3	15	4	3.02	1
58	15	45	20	40	4	5.06	3
59	16	48	6	12	4	9.20	5
60	17	34	10	15	4	6.08	4

Пример условия Задачи 9: Инвестор владеет двумя нуждающимися в устройстве новой кровли и пригодными для надстройки зданиями с площадями этажей $S_1 = 100$ м^2 и $S_2 = 200$ м^2, соответственно. Эти здания расположены в разных городских кварталах, где сети инженерного обеспечения обязаны иметь резервы для подключения дополнительных площадей не менее $R_1 = 1500$ м^2 и $R_2 = 1600$ м^2, соответственно, сверх требуемого для уже имеющихся в этих кварталах помещений.

Если с увеличением общей площади в результате надстройки резерв подключения в соответствующем квартале города перестанет обеспечиваться, то за счёт инвестора данной надстройки будет осуществлена дополнительная прокладка сетей по $D = 200$ руб. за м^2 новой (добавляемой при надстройке) площади.

Резервы обычно оказываются превышенными, но не более чем на $r_1 = 40\%$ и $r_2 = 50\%$ по отношению к R_1 и R_2 ($R_1r_1/100$ и $R_2r_2/100$, соответственно). При надстройке зданий новыми площадями s_1 и s_2 вероятности не уложиться в указанные превышения (и оплатить дополнительную прокладку сетей) равны, соответственно, $100s_1/(R_1r_1)$ и $100s_2/(R_2r_2)$, но не более 1.

Инвестор является рискофилом (авантюристом) и воспринимает реальную вероятность оплаты прокладки сетей, как возведённую в степень $p = 3$, т.е. меньшую, чем реальная. Инвестиционные предложения сравниваются им по минимуму отношения ожидаемой общей стоимости надстроек к квадрату новой площади $(C_1 + C_2)/(s_1 + s_2)^2 \rightarrow min$.

При стоимости 1 м^2 кровли $K = 150$ руб. определить количества этажей $n_1 = s_1/S_1$ и $n_2 = s_2/S_2$, которые инвестор выберет, чтобы надстроить над своими зданиями в обоих кварталах, если себестоимость работ по надстройке в расчёте на 1 м^2 новой площади равна сумме $A = 100$ руб., умноженной на возведённое в степень 1,5 количество надстраиваемых этажей (n_1 или n_2).

Решение:

1) $s_1 = n_1S_1$, $s_2 = n_2S_2$ и стоимости надстройки зданий с учётом ожидания принудительной оплаты прокладки сетей составят $C_1 = s_1D\,[100s_1/(R_1r_1)]^3 + S_1K + s_1A\,n_1^{1,5} =$ $= n_1S_1D\,[100n_1S_1/(R_1r_1)]^3 + S_1K + n_1S_1A\,n_1^{1,5} = 10^6Dn_1^4S_1^4/(R_1^3r_1^3) + S_1K + n_1^{2,5}S_1A$, если вероятность $100s_1/(R_1r_1) < 1$, и $C_1 = n_1S_1D + S_1K + n_1^{2,5}S_1A$, если $100s_1/(R_1r_1) = 1$ или больше 1,

$C_2 = s_2D\,[100s_2/(R_2r_2)]^3 + S_2K + s_2A\,n_2^{1,5} =$ $= n_2S_2D\,[100n_2S_2/(R_2r_2)]^3 + S_2K + n_2S_2A\,n_2^{1,5}) = 10^6Dn_2^4S_2^4/(R_2^3r_2^3) + S_2K + n_2^{2,5}S_2A$, если вероятность $100s_2/(R_2r_2) < 1$, и $C_2 = n_2S_2D + S_2K + n_2^{2,5}S_2A$, если $100s_2/(R_2r_2) = 1$ или больше 1,

2) составим таблицу значений заданной в условии целевой функции $(C_1 + C_2)/(s_1 + s_2)^2$ в зависимости от сочетания количеств этажей n_1 и n_2, которые предполагается надстроить над зданиями, и определим лучшее (т.е. меньшее) из этих значений

			C_2	30000	50625	153137	392394	830000	1348034	2033633
$R_2r_2/100 = 800$			s_2	0	200	400	600	800	1000	1200
$R_1r_1/100 = 600$			n_2	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	6
C_1	s_1	n_1	$[100s/(Rr)]^3$	0	0,0156	0,1250	0,4219	1,0000	1	1
15000	0	0	0	$+\infty$	1,6404	1,0509	1,1317	1,3203	1,3630	1,4227
25092.6	100	1	0,0046	5,5093	0,8413	0,7129	0,8520	1,0557	1,1348	1,2182
73050	200	$\boxed{2}$	0,0370	2,5763	0,7730	$\boxed{0,6283}$	0,7273	0,9031	0,9869	1,0748
178385	300	3	0,1250	2,3154	0,9160	0,6766	0,7047	0,8334	0,9032	0,9831
358704	400	4	0,2963	2,4294	1,1370	0,7998	0,7511	0,8255	0,8708	0,9345
631887	500	5	0,5787	2,6475	1,3929	0,9692	0,8465	0,8650	0,8800	0,9223
1016816	600	6	1,0000	2,9078	1,6679	1,1700	0,9786	0,9423	0,9238	0,9415
		7	1	Зона неизбежности по надстройке n_1 и риска по надстройке n_2				Зона полной неизбежности оплаты прокладки сетей		
		8	1							

Ответ: Выбираемые количества надстраиваемых этажей $n_1 = 2$ и $n_2 = 2$.

Исходные данные			
$p = 3$			
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A
1	100	1500	60
2	120	1600	50
1	200	150	100
1	100	1500	60
2	120	500	50
2	200	150	100
1	100	1500	60
2	120	300	50
3	200	150	100
1	100	1000	60
2	120	300	50
4	200	150	100
1	100	500	60
2	120	300	50
5	200	150	100
1	100	500	60
2	120	600	50
6	200	150	100
1	100	500	60
2	120	600	80
7	200	150	100
1	100	500	60
2	120	600	30
8	200	150	100
1	100	500	60
2	120	600	20
9	200	150	100
1	100	500	30
2	120	600	20
10	200	150	100
1	150	500	30
2	120	600	20
11	200	150	100
1	150	500	30
2	120	600	40
12	200	150	100
1	150	500	30
2	120	600	50
13	200	150	100
1	150	500	30
2	120	600	50
14	200	150	90
1	150	500	30
2	120	600	50
15	200	150	80
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A

Исходные данные			
$p = 2$			
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A
1	150	1400	60
2	150	1300	50
16	150	120	80
1	150	1400	60
2	150	1300	50
17	150	50	80
1	150	1400	60
2	150	1300	50
18	150	70	80
1	150	1400	20
2	150	1300	50
19	150	70	80
1	150	1400	30
2	150	1300	50
20	150	70	80
1	150	1400	30
2	150	1300	40
21	150	70	80
1	150	1400	30
2	150	1300	20
22	150	70	80
1	150	1400	30
2	150	1300	10
23	150	70	80
1	150	1400	30
2	150	1300	10
24	150	150	80
1	150	1400	30
2	150	1300	10
25	150	120	80
1	180	1400	30
2	150	1300	10
26	150	120	80
1	200	1400	30
2	150	1300	10
27	150	120	80
1	200	1400	50
2	150	1300	10
28	150	120	80
1	200	1400	60
2	150	1300	10
29	150	120	80
1	200	1400	95
2	150	1300	10
30	150	120	80
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A

Исходные данные			
$p = 3$			
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A
1	200	3000	60
2	240	3200	50
31	200	150	100
1	200	3000	60
2	240	1000	50
32	200	150	100
1	200	3000	60
2	240	600	50
33	200	150	100
1	200	2000	60
2	240	600	50
34	200	150	100
1	200	1000	60
2	240	600	50
35	200	150	100
1	200	1000	60
2	240	1200	50
36	200	150	100
1	200	1000	60
2	240	1200	80
37	200	150	100
1	200	1000	60
2	240	1200	30
38	200	150	100
1	200	1000	60
2	240	1200	20
39	200	150	100
1	200	1000	30
2	240	1200	20
40	200	150	100
1	300	1000	30
2	240	1200	20
41	200	150	100
1	300	1000	30
2	240	1200	40
42	200	150	100
1	300	1000	30
2	240	1200	50
43	200	150	100
1	300	1000	30
2	240	1200	50
44	200	150	90
1	300	1000	30
2	240	1200	50
45	200	150	80
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A

Исходные данные			
$p = 2$			
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A
1	300	2800	60
2	300	2600	50
46	150	120	80
1	300	2800	60
2	300	2600	50
47	150	50	80
1	300	2800	60
2	300	2600	50
48	150	70	80
1	300	2800	20
2	300	2600	50
49	150	70	80
1	300	2800	30
2	300	2600	50
50	150	70	80
1	300	2800	30
2	300	2600	40
51	150	70	80
1	300	2800	30
2	300	2600	20
52	150	70	80
1	300	2800	30
2	300	2600	10
53	150	70	80
1	300	2800	30
2	300	2600	10
54	150	150	80
1	300	2800	30
2	300	2600	10
55	150	120	80
1	360	2800	30
2	300	2600	10
56	150	120	80
1	400	2800	30
2	300	2600	10
57	150	120	80
1	400	2800	50
2	300	2600	10
58	150	120	80
1	400	2800	60
2	300	2600	10
59	150	120	80
1	400	2800	95
2	300	2600	10
60	150	120	80
1	S_1	R_1	r_1
2	S_2	R_2	r_2
№	D	K	A