Министерство Образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ
(Государственная Академия)

Кафедра высшей математики и строительной механики

Кабанова О.А.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по курсу «Высшая математика»
раздел **«Линейная алгебра»**

Вычисление определителя
Нахождение обратной матрицы

Москва – 2015 год

От автора.

Данное методическое пособие предназначено для студентов 1-го курса всех специальностей как дополнение к читаемому курсу «Высшая математика».

Это пособие особенно будет полезно для студентов, не успевающих усвоить материал сразу на лекции, т.к. в нем, наряду с необходимыми теоретическими вставками, подробно разбираются различные способы вычисления определителей и нахождения обратной матрицы.

1. Определители

1.1. Понятие определителя.

Определитель – это число, которое является характеристикой данной квадратной матрицы. Определители существуют только для квадратных матриц.

Чтобы подчеркнуть связь между квадратной матрицей и ее определителем, его обозначают также как и матрицу, к которой он относится, только меняют форму скобок. Если в матрице элементы ограничены двумя круглыми скобками, то, выпрямив скобки до прямых вертикальных линий, мы получим определитель. При этом элементы матрицы автоматически становятся элементами определителя, который кратко обозначается одним из символов **Δ, $|A_n|$, detA**.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Несмотря на то, что внешне квадратная матрица и ее определитель отличаются только формой скобок, между ними есть принципиальное отличие. **Матрица – это таблица чисел, а ее определитель – это одно число, которое характеризует эту квадратную матрицу.**

Определитель 1-го порядка – это определитель квадратной матрицы 1-го порядка A_1, который равен значению элемента a_{11}, так как матрица A_1 состоит из одного этого элемента, который одновременно является ее числовой характеристикой: $\Delta=|A_1|= a_{11}$.

Определитель 2-го порядка – это определитель квадратной матрицы 2-го порядка - A_2, который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}, \qquad (1.1)$$

то есть он **равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей** (рис.1.1).

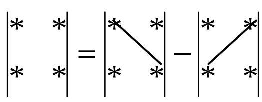

Рисунок 1.1

Пример 1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot(-3) = 10 + 12 = 22$

Определитель 3-го порядка – это определитель квадратной матрицы 3-го порядка A_3, который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} \qquad (1.2)$$

Для запоминания формулы (1.2) используют правило треугольников, которое символически изображено на рисунке 1.2.

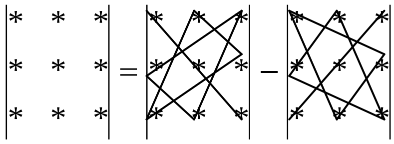

Рисунок 1.2

Со знаком (+) берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком (–) берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Пример 2: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot(-6) + 4\cdot(-3)\cdot1 + 7\cdot(-1)\cdot0 - 4\cdot5\cdot7 - 2\cdot1\cdot0 - (-6)\cdot(-3)\cdot(-1)$ =

$= - 60 - 12 + 0 - 140 - 0 + 18 = - 194$

Для нахождения определителей более высоких порядков необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения матричного элемента.

Определение. **Минором M_{ij}** элемента a_{ij} называется определитель, который получается из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Например, пусть дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Чтобы найти минор элемента a_{11} (обозначается M_{11}) нужно из данного определителя удалить первую строку и второй столбец.

Вычеркиваем: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Получаем, что $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

Вычеркиванием второй строки и первого столбца находим минор элемента a_{21}:

$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минор элемента a_{31} будет выглядеть так: $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Определение. **Алгебраическим дополнением** $\mathbf{A_{ij}}$ элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

В показателе складываются номер строки и номер столбца, на пересечении которых стоит матричный элемент.

Например, если дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

то $A_{11}=(-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $A_{12}=(-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, …,

$A_{33}=(-1)^6 \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

1.2. Свойства определителей.

1) При транспонировании определителя его значение не меняется, (то есть значение определителя не меняется при замене его строк столбцами с теми же номерами).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Следовательно, строки и столбцы определителя равноправны, поэтому его свойства можно формулировать и доказывать либо для строк, либо для столбцов.

2) При взаимной перестановке любых двух строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный.
Доказательство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -(a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3) Определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

4) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{12} \cdot a_{21} = \lambda(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5) Величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца) определителя, умноженные на одно и то же число.

Приступая к вычислению определителя необходимо сравнить строки (столбцы) друг с другом на наличие пропорциональных. Если таковые имеются, то смело можно писать 0.

Пример 3. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

Сравнив столбцы между собой, заметим, что соответствующие (стоящие на одинаковых позициях) элементы 1го и 3го столбцов пропорциональны. По свойству 3) данный определитель равен 0.

1.3. Вычисление определителя методом разложения по ряду.

Теорема Лапласа (точнее, частный случай теоремы Лапласа) гласит, что всякий ***определитель равен сумме попарных произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения***, то есть

$$\Delta = |A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} , \qquad (1.3)$$

где $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по i-ой строке, а $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по j-му столбцу.

На примере определителя 3го порядка это выглядит так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, = \boldsymbol{a_{11}} \cdot \boldsymbol{A_{11}} + \boldsymbol{a_{12}} \cdot \boldsymbol{A_{12}} + \boldsymbol{a_{13}} \cdot \boldsymbol{A_{13}}$$ (разложение по первой строке) или

$$= \boldsymbol{a_{13}} \cdot \boldsymbol{A_{13}} + \boldsymbol{a_{23}} \cdot \boldsymbol{A_{23}} + \boldsymbol{a_{33}} \cdot \boldsymbol{A_{33}}$$ (разложение по третьему столбцу) = …

Понятно, что, если выбирать ряд в котором есть нули, то слагаемых в разложении будет меньше.

Вычислим определитель из ***примера 2*** этим способом, разложив его по ряду, где есть нули, например по второй строке.

Пример 4. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \mathbf{-3} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + \mathbf{5} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + \mathbf{0} =$

$= 3 \cdot \big(-1 \cdot (-6) - 1 \cdot 4\big) + 5 \cdot \big(- 12 - 28 \big) = 6 - 200 = -194$

Если определитель $\Delta \neq 0$ то по свойству 5) в нем всегда можно «обнулить» любую строку (любой столбец) **до единственного ненулевого элемента** и разложить определитель по этой строке (столбцу). Применяя эту операцию нужное число раз, всегда можно из определителя n-го порядка получить определитель 2-го порядка.

Начиная выбирать ряд, в котором будет делаться максимальное количество нулей, рациональнее сначала поискать строки (столбцы) с пропорциональными соответствующими элементами. При их наличии нули делаются достаточно быстро.

Пример 5. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [Сравнив строки (столбцы), заметим пропорциональные

× (-2)

элементы в 1ом и 2ом столбцах. (Если бы все элементы были пропорциональны, определитель был бы равен 0). Умножив 1ый столбец на -2 , прибавим ко 2му. При этом изменяется только тот ряд, к которому прибавляем] =

$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [Разложим определитель по 2му столбцу] =

$= 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$ [Разложим определитель по ряду с 0, например

по 3му столбцу] $= -2 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$ [Перед обоими определителями получаются плюсы благодаря четным степеням] =

$= -2 \cdot \big((-4-3) + 0 + 3 \cdot (1-6)\big) = -2 \cdot (-22) = 44$

В случае отсутствия пропорциональных элементов сделать максимальное количество нулей в ряду можно с помощью элемента, равного **±1** (если его нет, его всегда можно сделать с помощью свойства 5)).

Заметим, что в этом случае, делая нули в строке, мы оперируем со столбцами, а, обнуляя до единственного $\neq 0$ элемента столбец, оперируем со строками. Покажем это на примере.

Пример 6. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ [Сделаем -1 на месте элемента -3 во второй строке.

Для этого по свойству 5 просто прибавим 1ую строку ко второй] =

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3+2 & 2+4 & 3-6 & 4+5 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 9 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ [Теперь по свойству 5) делаем нули

× 6

× (-3)

× 9

во второй строке (оперируем со столбцами). Для этого умножаем 1ый столбец (в нем находится наша -1) на 6 и прибавляем ко 2му, затем умножаем на -3 и прибавляем к 3му, затем на 9 и прибавляем к 4му столбцу] =

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4+12 & -6-6 & 5+18 \\ -1 & 6-6 & -3+3 & 9-9 \\ -4 & 5-24 & 8+12 & 2-36 \\ 3 & 4+18 & 2-9 & -3+27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & -12 & 23 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -19 & 20 & -34 \\ 3 & 22 & -7 & 24 \end{vmatrix}$$ [Раскладываем определитель

по 2ой строке] = $-1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 16 & -12 & 23 \\ -19 & 20 & -34 \\ 22 & -7 & 24 \end{vmatrix}$, $+ 0 + 0 + 0$ [Теперь попытаемся найти одинаковый множитель у элементов строк или столбцов. Такого к сожалению здесь нет. Поэтому просто раскладываем определитель, например по 1ой строке.]

$$= 1 \cdot \left(16 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 20 & -34 \\ -7 & 24 \end{vmatrix} - 12 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -19 & -34 \\ 22 & 24 \end{vmatrix} + 23 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -19 & 20 \\ 22 & -7 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 1 \cdot \Big(16 \cdot \big(20 \cdot 24 - (-7) \cdot (-34)\big) + 12 \cdot \big((-19) \cdot 24 - 22 \cdot (-34)\big) + 23 \cdot \big((-19) \cdot (-7) - 22 \cdot 20\big)\Big) =$$

$$= 16 \cdot (480 - 238) + 12 \cdot (-456 + 748) + 23 \cdot (133 - 440) = 3872 + 3504 - 7061 = 315$$

Вычислим тот же определитель, сделав 1 в другом месте.

Пример 7. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ [Сделаем 1 в 4ой строке вместо 3. Для этого 1ую строку умножим на -1 и прибавим к 4ой] =

= [Получили намного удобнее числа, чем в предыдущем решении. Продолжим делать нули в той строке, где один нуль уже получился. Для этого сначала просто прибавим 3ий столбец к 4му. А потом умножим 1ый столбец на 8 и прибавим к 3му.] =

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -22 & -1 \\ -3 & 2 & 27 & 7 \\ -4 & 5 & 40 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ [Разложим определитель

+

×(-8)

по 4ой строке] $= \; 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 5 & 40 & 10 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$ [Заметим, что пятая строка содержит одинаковый множитель. Вынеся его за знак определителя по свойству 4, существенно упростим вычисления] =

$$= (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix},$$

[Хотя определитель 3го порядка не сложно разложить по ряду и без нулей, сделаем нули в третьей строке с помощью 1. Для этого 1ый столбец умножим на -8 и прибавим ко 2му, затем на -2 и прибавим к 4му] =

$$= (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}, = -5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22-32 & -1-8 \\ 2 & 27-16 & 7-4 \\ 1 & 8-8 & 2-2 \end{vmatrix}, = -5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -54 & -9 \\ 2 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, =$$

×(-8)

× (-2)

$$= -5 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -54 & -9 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 \right) = -5 \cdot (-162 + 99) = 315$$

1.4. Вычисление определителя методом приведения к треугольному виду.

Определитель треугольного вида равен произведению его диагональных элементов, то есть, если по одну сторону от главной диагонали матрицы стоят нули, то ее определитель можно вычислить следующим образом:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}$$

Пример 8 . Вычислить определитель сведением его к треугольному виду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Чтобы свести определитель к треугольному виду, необходимо в 1ом столбце обнулить три элемента, во 2ом – два, в 3ем – один. Получится ступенчатый треугольный вид, в котором под каждой «ступенькой» будут стоять нули. Начнем обнуление с 1го столбца.

Для этой цели выберем в качестве активной 2-ую строку, у которой 1-ый элемент равен 1, а остальные элементы **минимальны по модулю** по сравнению с элементами 1ой и 4ой строк. Для удобства поставим ее на первое место (при этом знак определителя по свойству 2 поменяется) и для ясности выделим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1)\ldots\times(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

[Делаем нули под 1ой ступенькой, т.е. в 1ом столбце под **1** с помощью первой строки. Для этого умножаем ее на -1 и прибавляем ко 2ой строке и к 4ой. Затем умножаем ее на -3 и прибавляем ко 2ой строке] $= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$ [Чтобы сделать нули под 2ой ступенькой поменяем 2ую и 3ю строки местами, для того чтобы на 2ой ступеньке стояла -1. При этом знак определителя опять поменяется.] =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

[Нули под 2ой ступенькой делаем с помощью 2ой строки, не трогая уже 1ую строку. Не будем выносить множитель 2 из 3ей строки, т.к. один из нулей удобно сделать, умножив 2ую строку на -1 и прибавив к 3ей (числа получатся меньше). Затем умножаем 2ую строку на 2 и прибавляем к 3ей строке.] =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$ [Заметим, что из 4ой строки можно вынести множитель] =

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ [Поменяем местами 3ю и 4ую строки. Знак опять изменится] =

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 6 \\ \\ \end{matrix}$$ [Делаем нуль под 3ей ступенькой, умножая 3ю строку

на 6 и прибавляя к 4ой строке] $= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 8 = -24$

2. Обратная матрица

2.1. Понятие обратной матрицы

Квадратная матрица А называется ***вырожденной***, если ее определитель $|A|=0$, и ***невырожденной***, если ее определитель $|A|\neq 0$.

Квадратная матрица $\mathbf{A^{-1}}$ называется ***обратной*** к квадратной матрице А, если выполняется условие:

$$\mathbf{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E} \qquad (2.1)$$

Заметим, что обратная матрица $\mathbf{A^{-1}}$ возможна только для невырожденной матрицы **А.**

Если в матрице А поменять местами строки на столбцы с сохранением их нумерации, то получится матрица $\mathbf{A^{T}}$, которая называется ***транспонированной*** матрицей для матрицы А**.**

Матрица $\tilde{A}$ называется ***союзной*** к квадратной матрице А, если она состоит из алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы A^{T}. Чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$, следует транспонировать матрицу А, а затем все ее элементы заменить их алгебраическими дополнениями, то есть

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Для любой невырожденной квадратной матрицы А существует ***единственная обратная матрица*** $\mathbf{A^{-1}}$, которая находится по формуле:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}} \qquad (2.3)$$

Эта формула позволяет находить обратную матрицу ***с помощью союзной матрицы*** и в развернутом виде выглядит так:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{т} = (A^{т})^{-1}$.

2.2. Вычисление обратной матрицы A^{-1} с помощью союзной матрицы $\tilde{A}$.

Для этого необходимо:
1) Вычислить определитель $|A|$. Если $|A|=0$, следовательно матрица A – вырожденная и для нее нет обратной матрицы A^{-1}. Если же $|A|\neq 0$, то продолжаем дальше.
2) Вычислить алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A и построить матрицу A_A, в которой на местах элементов a_{ij} будут стоять их алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3)Транспонировать матрицу A_A, чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = A_A^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Вычислить обратную матрицу A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$

5) Выполнить проверку: $A^{-1}\cdot A = E$.

Пример 9 . Найти обратную матрицу для данной $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) Вычислим определитель $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (6 - 10) + (-3 - 20) = 8 - 23 = -15$$

2) Найдем алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -23 ;$$

$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 5;$ $\quad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & -2\end{vmatrix} = -5;$ $\quad A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix} = 10;$

$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} = 0;$ $\quad A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix} = 6.$

3) Составим матрицу A_A из алгебраических дополнений A_{ij} и транспонируем ее, чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$A_A = \begin{pmatrix}-10 & 4 & -23\\ 5 & -5 & 10\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = A_A^T = \begin{pmatrix}-10 & 5 & 0\\ 4 & -5 & -3\\ -23 & 10 & 6\end{pmatrix}$$

4) Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 5 & 0\\ 4 & -5 & -3\\ -23 & 10 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5}\\ \frac{23}{15} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

В случае, когда $|A| \neq \pm 1$, множитель $\dfrac{1}{|A|}$ лучше оставлять вне обратной матрицы A^{-1} для удобства проверки.

5) Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A = -\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 5 & 0\\ 4 & -5 & -3\\ -23 & 10 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 2\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-15 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & -15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5}\\ \frac{23}{15} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

2.3. Вычисление обратной матрицы A^{-1} методом элементарных преобразований над строками матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:
1) перестановка строк (столбцов) матрицы;
2) умножение элементов строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление элементов одной строки (столбца) к соответствующим элементам другой

строки (столбца);
4) вычеркивание нулевой строки (столбца) матрицы.

Матрицы А и В называются ***эквивалентными*** (А ~ В), если одна из них получается из другой в результате элементарных преобразований.

Суть метода элементарных преобразований над *строками* матрицы заключается в следующем. К исходной квадратной матрице A_n справа через разделительную вертикальную черту приписывают единичную матрицу Е того же порядка, что и А, и таким образом получают расширенную матрицу (А|Е). Далее, с помощью элементарных преобразований над *строками* приводят матрицу (А|Е) сначала к ступенчатому виду (A_1|B), где A_1 – верхняя треугольная матрица, а затем к виду ($E|A^{-1}$). Таким образом, имеет место преобразование: $(A|E)\Rightarrow(E|A^{-1})$.

Пример 10. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований над *строками.*

Решение. $(A|E) = \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \times(-1)\ldots\times(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$

$$\sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \times(-2)\ldots\times 3 \end{array} \sim$$

[Теперь с помощью третьей строки делаем нули над последней ступенью в 3ем столбце]

$\sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \times(-\frac{1}{3}) \\ \times(-1) \end{array}$ [Умножаем 2ую строку на $(-\frac{1}{3})$, а 3ю на (– 1),

используя элементарное преобразование 2] $\sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \times(-5) \\ \\ \end{array} \sim$

[Последний нуль вместо 5 в начале второго столбца делаем только с помощью второй строки, чтобы не испортить другие числа, умножая ее на -5 и прибавляя к 1ой строке]

$$\sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1}\cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Основная литература.

1) Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть I. – М.: Айрис – Пресс, 2009.
2) Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-Пресс, 2008.
3) Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969
4) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –Ижевск: РХД, 2000.
5) Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ, Астрель, 2006

Дополнительная литература

Михеев В.И., Павлюченко Ю.В. Высшая математика: Краткий курс. – М.: РУДН, 2008.