

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ ( ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ)

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
И  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Г.М.ЧЕНТЕМИРОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ  
ПЛОСКИХ РАМ**  
(ломаных балок).

МОСКВА 2015

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ ( ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ)

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
И  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Г.М.ЧЕНТЕМИРОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ  
ПЛОСКИХ РАМ**  
(ломаных балок).

МОСКВА 2015

## СОДЕРЖАНИЕ.

1.	Общие сведения о рамах.....	3
2.	Расчет простых рам (ломанных балок) .....	4
3.	Пример расчета простых рам.....	9
	Литература.....	18

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАМАХ.

Рамой называется геометрически неизменяемая система, состоящая из стержней, которые в основном соединяются между собой жесткими узлами. Некоторые узлы рамы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго-податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается, как до деформаций, так и после деформаций.

Рама состоит из стоек и ригелей. Стойками называются вертикальные стержни, а ригелями- горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению стержни рамы.

Основными геометрическими характеристиками рамы являются пролет и высота.

Пролетом рамы называется расстояние между осями стоек или между центрами опор ригеля. Высотой рамы называется расстояние от центра опоры стойки до центра опоры ригеля.

Рамы имеют различные геометрические схемы: однопролетные, многопролетные, одноэтажные, многоэтажные и т.д.

Рамные конструкции широко применяются в строительстве. Они используются в каркасах жилых, общественных и промышленных зданий, в конструкциях эстакад, мостов, различных опор и фундаментов.

Обычно рамные конструкции представляют собой пространственные системы, которые в целях упрощения в большинстве случаев можно рассматривать как плоские, если это не приводит к большим погрешностям

при расчете. В то же время необходимо отметить, что в подавляющем большинстве случаев применяются статически неопределимые рамы как более экономичные. В настоящем пособии рассматривается расчет плоских статически определимых рам.

## 2. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ РАМ.

Простая рама или ломаная балка представляют собой геометрически неизменяемую, статически определимую стержневую систему, состоящую из двух или трех стержней, жестко соединенных между собой в узлах, с шарнирно- подвижной и шарнирно неподвижной опорами (рис.2.1).

Аналитический расчет такой рамы заключается в определении внутренних усилий, изгибающего момента, поперечной и продольной сил, от заданных внешних воздействий и в построении соответствующих эпюр на геометрической схеме рамы по осям стоек и ригелей.

На эпюре моментов  $M$  знаки обычно не ставятся, так как ординаты значений изгибающих моментов обязательно откладываются со стороны растянутых волокон. В то же время момент считается положительным, если он растягивается нижние волокна для ригелей и правые – для стоек (рис.2.2).

При построении эпюр моментов полезно помнить следующие правила, которые облегчают построение и проверку правильности построения:

- 1) на прямолинейном ненагруженном участке стержня эпюра (рис.2.3а) моментов всегда прямолинейная;

- 2) в точке приложения сосредоточенного внешнего момента эпюра имеет скачек численно равный величине этого момента (рис 2.3б);
- 3) в точке приложения сосредоточенной силы, линия действия которой перпендикулярна оси стержня, эпюра изгибающих моментов всегда имеет перелом, направленный острием в сторону действия этой силы (рис.2.3в);
- 4) на участке действия равномерно-распределенной нагрузки  $q$ , эпюра изгибающих моментов имеет очертание кривой второго порядка (параболы) с выпуклостью, направленной в сторону действия нагрузки, и со стрелкой в середине любого участка длиной  $a$  равной  $ql^2/8$  (рис.2.3г).

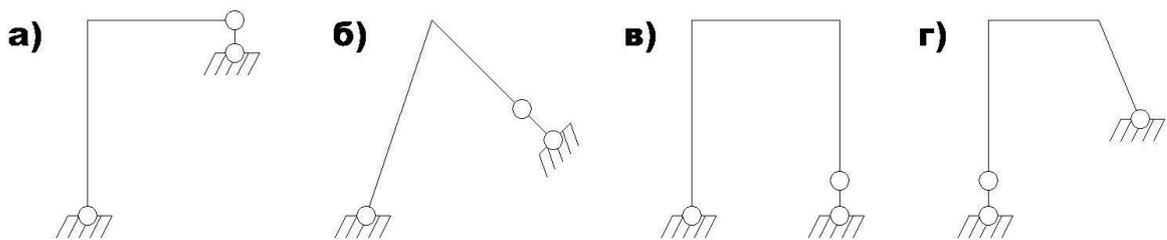


Рис.2.1. Схемы простых рам .

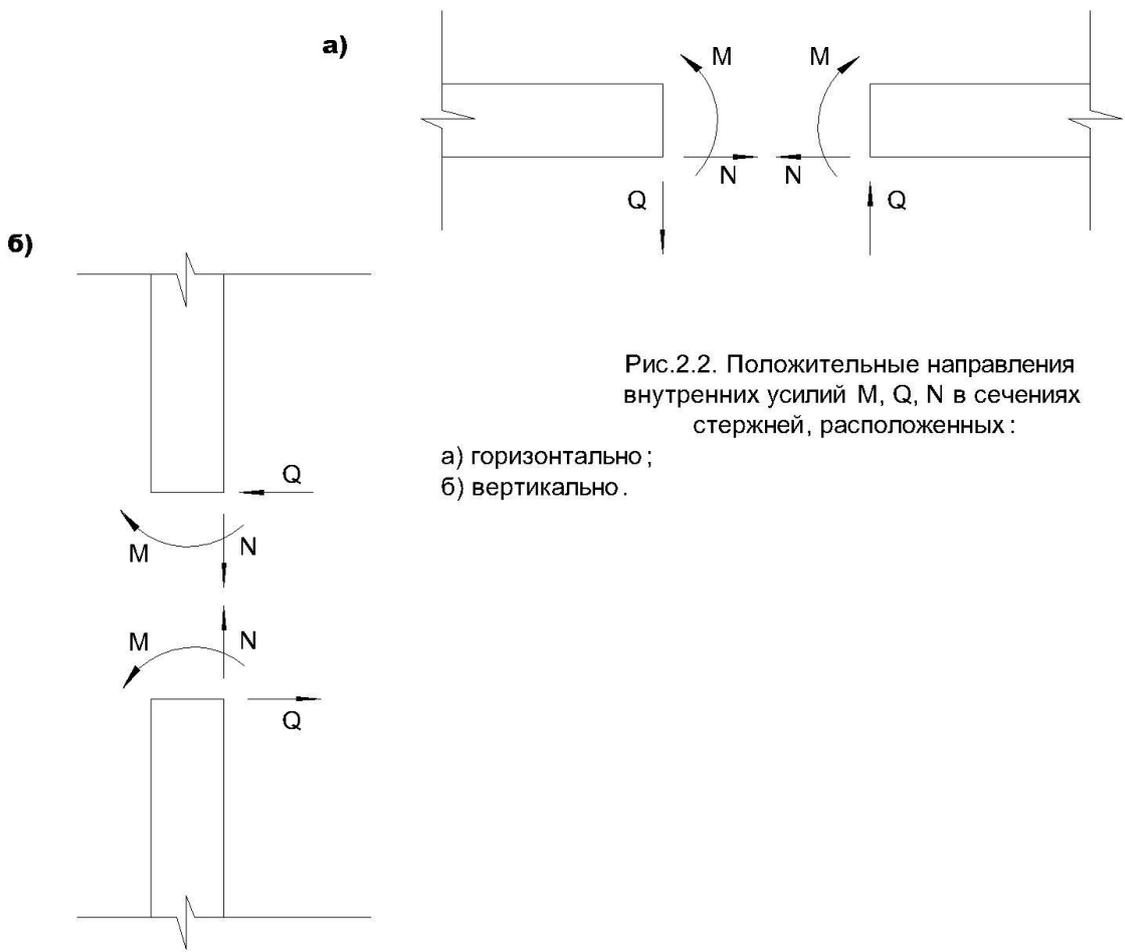


Рис.2.2. Положительные направления внутренних усилий  $M, Q, N$  в сечениях стержней, расположенных :

- а) горизонтально ;
- б) вертикально .

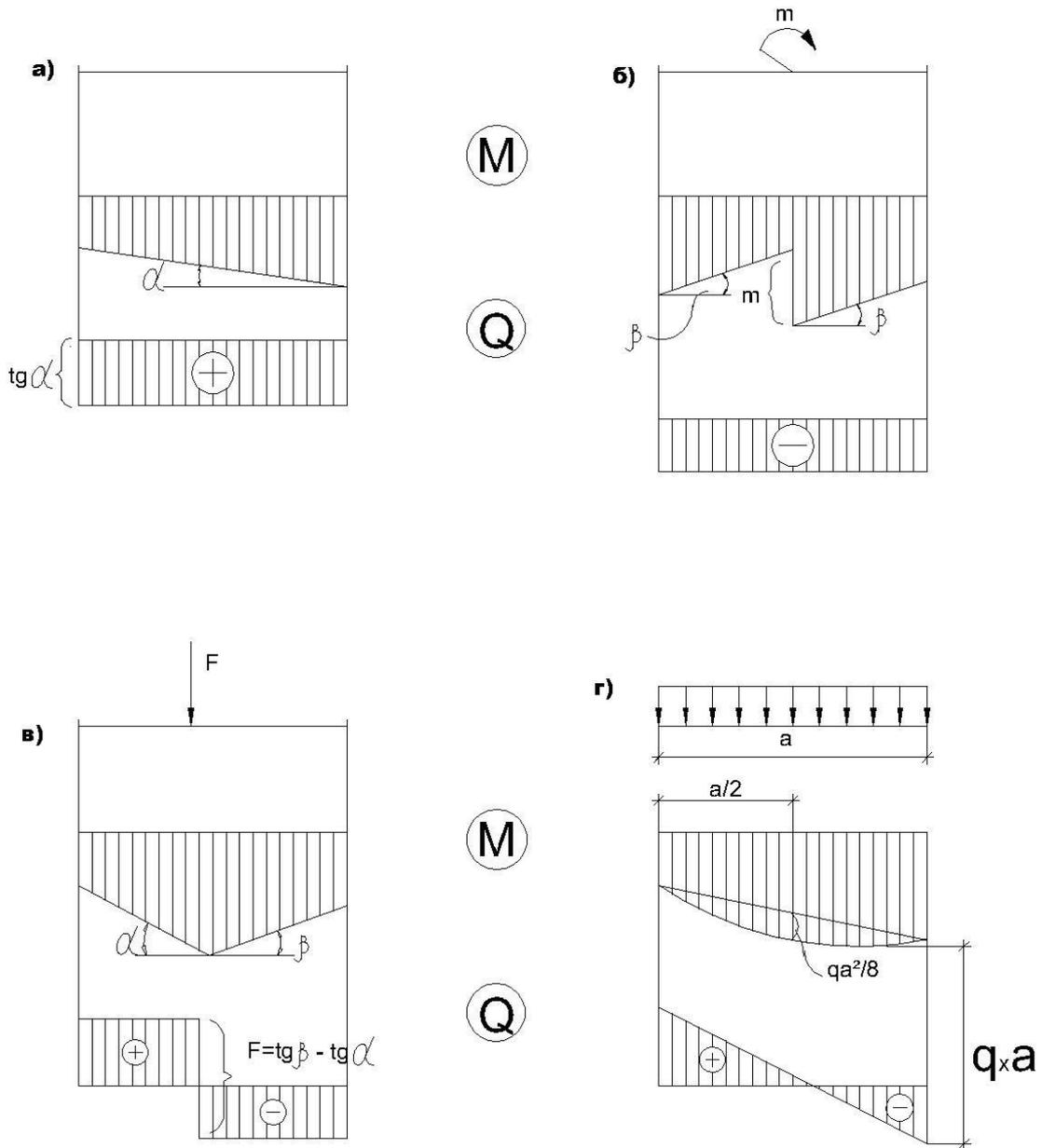


Рис.2.3. Фрагменты эпюр моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  при различных внешних воздействиях :

- а) ненагруженный участок ;
- б) при действии сосредоточенного момента ;
- в) при действии сосредоточенной силы ;
- г) при действии равномерно -распределенной нагрузки .

На эпюрах  $Q$  и  $N$  знаки обязательно ставятся. Поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она вращает рассматриваемый участок конструкции по ходу часовой стрелки (рис.2.2) В то же время поперечная сила имеет

положительное значение на тех участках, где моменты возрастают. Положительные значения поперечных сил откладываются сверху для ригелей и слева – для стоек.

При построении эпюр поперечных сил следует учитывать, что

- 1) На ненагруженных участках и в случае действия только сосредоточенного внешнего момента эпюра  $Q$  имеет постоянное значение и соответствует прямолинейной эпюре  $M$  (рис.2.3а и рис. 2.3б)
- 2) В точке приложения сосредоточенной внешней силы  $F$ , перпендикулярной оси стержня, в эпюре  $Q$  образуется скачок по направлению действия этой силы (рис.2.3в) и соответствует излому в эпюре моментов  $M$ , направленному в ту же сторону.
- 3) На участке действия равномерно – распределенной внешней нагрузки эпюра  $Q$  прямолинейная, убывающая в сторону действия этой нагрузки (рис.2.3г) и соответствует эпюре моментов параболического очертания.

Продольная сила  $N$  считается положительной при растяжении стержня, т.е. когда она направлена от сечения, и отрицательной при сжатии, когда сила направлена к сечению (рис.2.2.). Эпюры продольных сил  $N$  обычно строят симметрично относительно оси стержня, обозначая знаком плюс (+) растягивающие и знаком минус (-) сжимающие продольные усилия.

Расчет простой рамы на действие статической нагрузки разберем на примере.

### 3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРОСТОЙ РАМЫ.

Построить эпюры M, Q, N для рамы, представленной на рис.2.4.

РЕШЕНИЕ. Прежде, чем приступить к расчету следует выполнить кинематический анализ и убедиться. Что заданная система неизменяемая. Данная рама может быть предоставлена как жесткий диск, прикрепленный к земле тремя опорными стержнями.

Эти опорные стержни непараллельные и не пересекаются в одной точке, следовательно данная рама неизменяемая и можно приступать к ее расчету.

Расчет начинается с определения опорных реакций, которые находятся из условия равновесия. Реакции  $V_A$  и  $V_B$  определяются из уравнений  $\sum M_C=0$  и  $\sum M_A=0$  соответственно. Горизонтальная составляющая  $H_A$  находится из условия  $\sum X=0$ . При составлении этих уравнений равновесия примем, что моменты, действующие по ходу часовой стрелки, будем считать положительными, а против - отрицательными.

$$\sum M_C = V_A \cdot \ell - m - F \ell + qh ( h + 1/2h ) = 0$$

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{m + F \ell - qh ( h + 0,5h )}{\underline{L}} = \\ &= \frac{20+40 \cdot 4 - 4 \cdot 5(5+0,5 \cdot 5)}{\underline{8}} = 3.75 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot L - m + F\ell + qh \cdot 1,5h = 0;$$

$$V_B = \frac{-m + F\ell + 1,5q \cdot h^2}{L} = \frac{-20 + 40 \cdot 4 + 1,5 \cdot 4 \cdot 5^2}{8} = \underline{36,25 \text{ кН}}$$

$$\sum X = -H_A + qh = 0;$$

$$H_A = qh = 4 \cdot 5 = \underline{20 \text{ кН}}$$

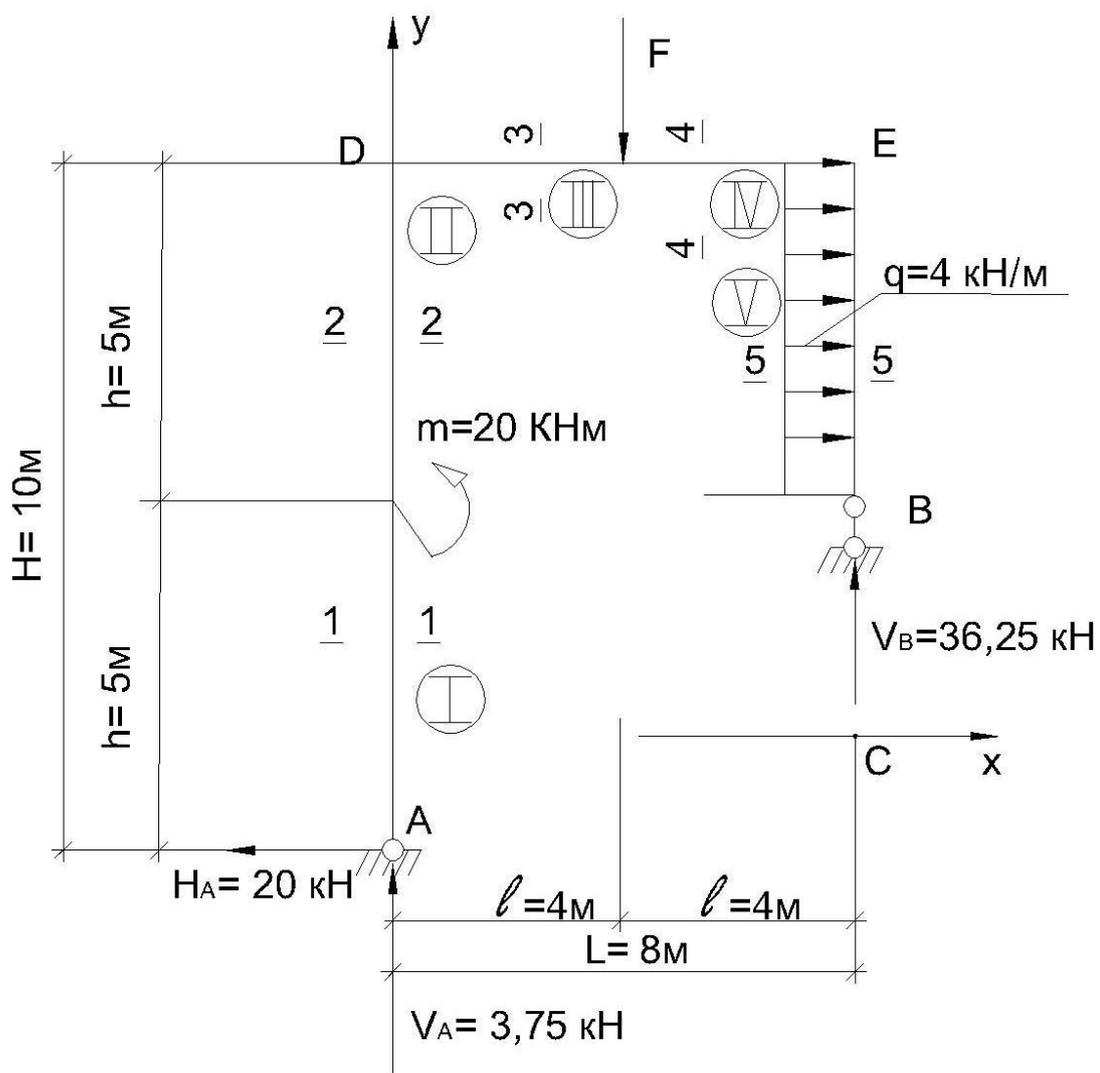


Рис.2.4. Однопролетная статистически определимая рама.

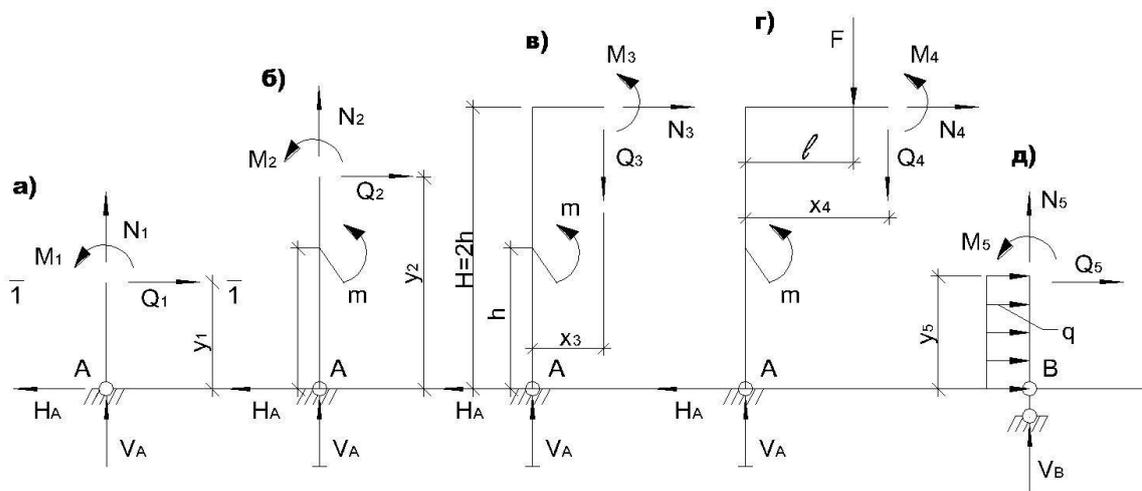


Рис.2.5. К определению внутренних усилий рамы (рис.2.4.)

Все реакции получились положительные и, следовательно, их действительные направления совпадают с принятыми.

Для проверки правильности вычисления реакций можно составить уравнение суммы моментов относительно произвольной точки плоскости рамы, относительно которой моменты от найденных реакций не будут равны нулю.

$$\begin{aligned} \text{Например: } \sum M_K &= V_A \cdot \ell + H_A \cdot H - m \cdot \ell - q \cdot h^2/2 - V_B \cdot \ell = \\ &= 3,75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 4 \cdot 5^2/2 - 36,25 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Можно выполнить и более простую проверку, только для вертикальных составляющих опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$ , которая осуществляется как

$$\sum y = V_A + V_B - F = 3,75 + 36,25 - 40 = 0$$

Таким образом, мы подтвердили правильность определения опорных реакций, после чего можно приступать к вычислению внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Для этого разбиваем раму на участки по характеру внешних силовых воздействий, как это показано римскими цифрами на рис.2.4. Всего получилось пять участков.

Разрезаем условно раму на две части, удаляем одну из частей заменяя ее влияние внутренними усилиями  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Для оставшейся, например, левой части, составляем три уравнения статистического равновесия всех сил, действующих на эту часть. Из этих уравнений определяем искомые  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

Рассмотрим 1-ый участок (рис.2.5а). Неизвестным внутренним усилиям  $M_1$ ,  $Q_1$  и  $N_1$  даем положительные направления, после чего переходим к определению этих усилий.

Величину и действительное направление изгибающего момента  $M_1$  найдем из условия равновесия моментов относительно 1-го сечения:

$$\sum M_1 = - M_1 + H_A \cdot y_1 = 0,$$

откуда

$$M_1 = H_A \cdot y_1$$

Полученное значение  $M_1$  положительное, следовательно в стойке растянуты правые волокна, и значение момента изменяется по линейному закону в соответствии с изменением аргумента  $0 \leq y_1 \leq 5\text{м}$ ,

при  $y_1=0$ ,  $M_{1(0)}=0$ ;

при  $y_1= h = 5\text{м}$ ,  $M_{1(5)}= 20 \cdot 5=100 \text{ кНм}$ .

Величину и направление поперечной силы  $Q_1$  определяем из уравнения суммы проекций всех сил, действующих на 1-ом участке, на ось перпендикулярную оси стойки, т.е. на ось X:

$$\sum X = Q_1 - H_A = 0,$$

Отсюда

$$N_1 = -V_A = -3,75 \text{ кН.}$$

Продольная сила  $N_1$  в левой стойке первого участка отрицательная, т.е. сжимающая и имеет постоянное значение. Аналогичным образом определяем внутренние усилия на остальных участках.

Участок 2,  $5 \leq y_2 \leq 10$  м (рис.2.5б).

$$\sum M_2 = -M_2 + H_A \cdot y_2 - m = 0,$$

$$M_2 = H_A \cdot y_2 - m;$$

$$y_2 = 5, M_{2(5)} = 20 \cdot 5 - 20 = 80 \text{ кНм};$$

$$y_2 = 10, M_{2(10)} = 20 \cdot 10 - 20 = 180 \text{ кНм.}$$

$$\sum X = Q_2 - H_A = 0, \quad Q_2 = H_A = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = N_2 + V_A = 0, \quad N_2 = -V_A = -3,75 \text{ кН.}$$

Участок 3,  $0 \leq X_3 \leq 4$  м (рис.2.5в).

$$\sum M_3 = -M_3 + V_A \cdot X_3 + H_A \cdot H - m = 0,$$

$$M_3 = V_A \cdot X_3 + H_A \cdot H - m;$$

$$X_3 = 0 \text{ м}, \quad M_{3(0)} = H_A \cdot H - m = 20 \cdot 10 - 20 = 180 \text{ кНм},$$

$$X_3 = 4 \text{ м}, \quad M_{3(4)} = 3,75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 20 = 195 \text{ кНм}.$$

$$\sum Y = -Q_3 + V_A = 0, \quad Q_3 = V_A = 3,75 \text{ кН}.$$

$$\sum X = N_3 - H_A = 0, \quad N_3 = H_A = 20 \text{ кН}.$$

Участок 4,  $4 \leq X_4 \leq 8 \text{ м}$  (рис.2.5г).

$$\sum M_4 = -M_4 + V_A \cdot X_4 + H_A \cdot H - m - F(X_4 \cdot 4) = 0;$$

$$M_4 = V_A \cdot X_4 + H_A \cdot H - m;$$

$$X_4 = 4 \text{ м}, \quad M_{4(4)} = M_{3(4)} = 3,75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 20 = 195 \text{ кНм}.$$

$$X_4 = 8 \text{ м}, \quad M_{4(8)} = 3,75 \cdot 8 + 20 \cdot 10 - 20 - 40(8-4) = 50 \text{ кНм}.$$

$$\sum Y = -Q_4 + V_A - F = 0; \quad Q_4 = V_A - F = 3,75 - 40 = 36,25 \text{ кН}.$$

$$\sum X = N_4 - H_A = 0, \quad N_4 = H_A = 20 \text{ кН}.$$

Участок 5,  $0 \leq y_4 \leq 5 \text{ м}$  (рис.2.5д).

$$\sum M_5 = -M_5 + q \cdot y_5^2 / 2 = 0; \quad M_5 = -q \cdot y_5^2 / 2;$$

$$y_5 = 0 \text{ м}, \quad M_{5(0)} = 0;$$

$$y_5 = 5 \text{ м}, \quad M_{5(5)} = -4 \cdot 5^2 / 2 = -50 \text{ кНм}.$$

$$\sum X = Q_5 + q y_5; \quad Q_5 = -q y_4;$$

$$y_5 = 0 \text{ м}, \quad Q_{5(0)} = 0;$$

$$y_5 = 5 \text{ м}, \quad Q_{5(5)} = -20 \text{ кН}.$$

$$\sum y = N_5 + V_B = 0, \quad N_5 = -V_B = -36,25 \text{ кН}.$$

В соответствии с полученными значениями внутренних усилий строятся эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , показанные на рис.2.6.

Как видно из примера расчет рамы связан с большим количеством вычислений, которые могут привести к ошибочным результатам, поэтому полученные значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  следует проверить, используя другие уравнения, по которым не приводились вычисления. Такая проверка обычно выполняется исходя из условия равновесия узлов рамы или отдельной ее части.

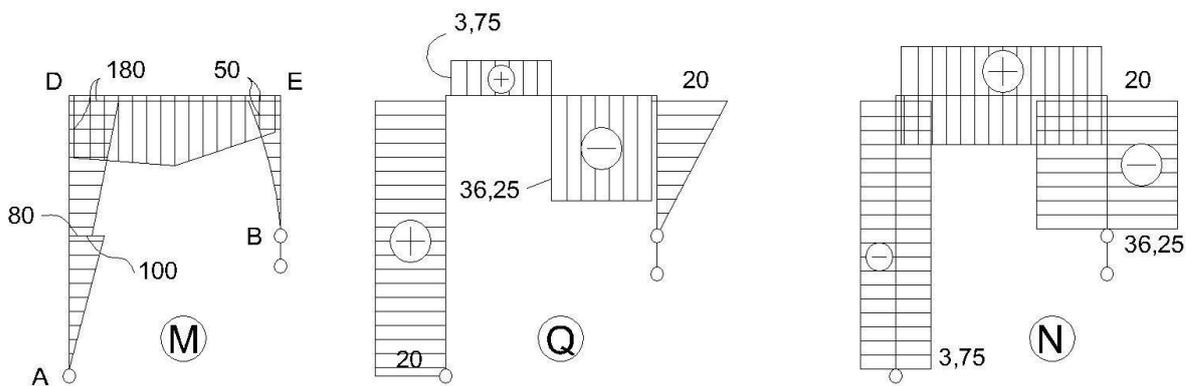


Рис.2.6. Эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

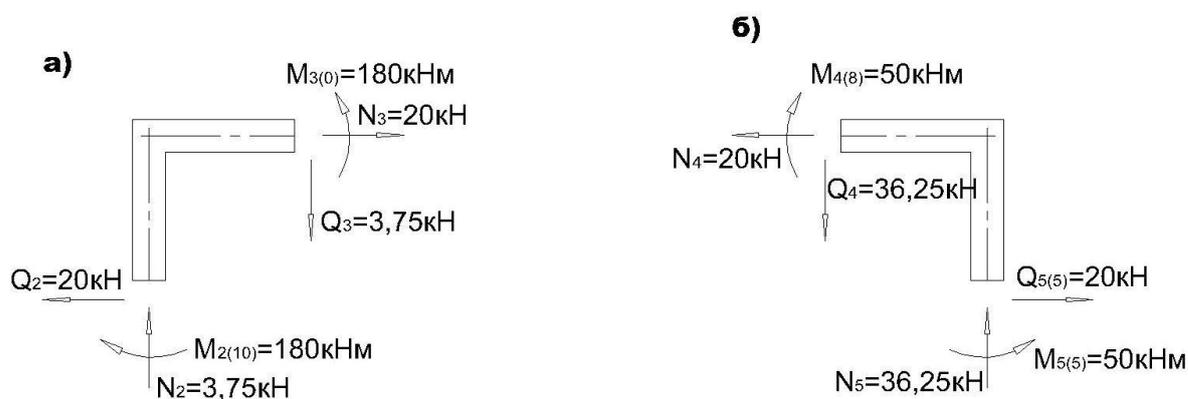


Рис.2.7. К проверке равновесия узлов D и E рамы (рис.2.4.)

Рассмотрим узел D, вырезав его из данной рамы и приложив все действующие на него внутренние и внешние усилия (см. рис.2.7а) и составив три уравнения равновесия:

$$\sum M_D = M_{2(10)} - M_{3(0)} = 180 - 180 = 0;$$

$$\sum X = -Q_2 + N_3 = -20 + 20 = 0;$$

$$\sum Y = N_2 - Q_3 = 3,75 - 3,75 = 0.$$

Все уравнения удовлетворяют условиям равновесия и, следовательно, узел D находится в равновесии.

$$\sum M_E = M_{4(8)} - M_{5(5)} = 50 - 50 = 0;$$

$$\sum X = -N_4 + Q_{5(5)} = -20 + 20 = 0;$$

$$\sum Y = -Q_4 + N_5 = -36,25 + 36,25 = 0.$$

В узле E так же выполняются все условия равновесия. Отсюда следует, что эпюры M, Q и N построены правильно.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В.А.Смирнов, А.С.Городецкий. Строительная механика. М., **Стройиздат**, 2013 г.
2. В.А.Смирнов, С.А.Иванов, М.А.Тихонов. Строительная механика. М., Стройиздат, 1984 г.
3. А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. М., Высшая школа, 1986 г.
4. Г.К. Клейн и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М., Высшая школа, 1980 г.
5. Н.Н.Анохин. Строительная механика в примерах и задачах. Часть I. Статически определимые системы. Издательство Ассоциации строительных вузов. М., 1999 г.