

Методическое пособие по строительной механике

**Пример расчета
трехшарнирной арки
параболического очертания.**

(к заданию №1)

Московский архитектурный институт
(Государственная академия)

Кафедра высшей математики и строительной механики

Кандидат технических наук
Г.М. Чентемиров

Методическое пособие по строительной механике

**Пример расчета
трехшарнирной арки
параболического очертания.**

(к заданию №1)

МОСКВА 2015

УДК 624.04

УДК 51-3

УДК 519.254

УДК 519.6 ВК В162я73

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Трехшарнирные арки	3
2.	Расчет трехшарнирной арки параболического очертания	8
2.1.	Определение опорных реакций	9
2.2.	Определение геометрических и тригонометрических параметров в заданных сечениях арки	12
2.3.	Определение внутренних усилий	16
	Литература	33

Ср.

1. Трехшарнирные арки

Трехшарнирная арка относится к трехшарнирным системам. Трехшарнирной системой называется система, состоящая из двух дисков, шарнирно соединенных между собой и с диском основания.

Шарнир, соединяющий два диска, называют замком или ключом. Таким образом, образуется неизменяемая конструкция, состоящая из 2-х дисков конструкции (системы) и диска основания с тремя шарнирами, образующими жесткую неизменяемую систему. Единственным условием неизменяемости является условие, при котором три шарнира (замковый и два опорных) не должны находиться на одной прямой (мгновенно изменяемая система), как это показано на рис. 1.2.

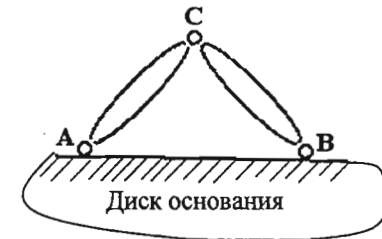


Рис 1.1. Трехшарнирная система



Рис 1.2. Мгновенно изменяемая трехшарнирная система

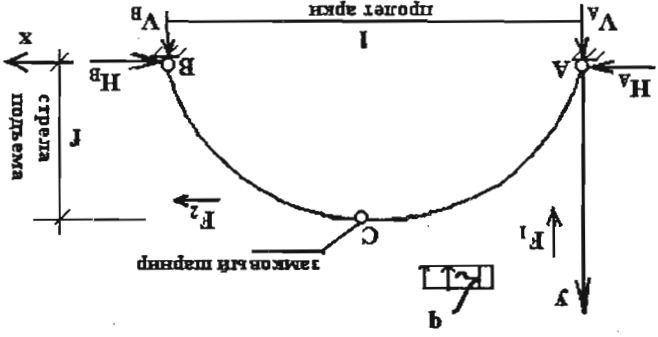


Рис. 1.3. Трехшарнирная арка

Трехшарнирной аркой называется трехшарнирная система, в которой дисками являются криволинейные стержни (см. рис. 1.3).

Основными геометрическими параметрами параболы арок являются пролет l и стрела подъема f . В зависимости от отношения стрелы подъема к пролету арки подразделяются на пологие с отношением $f/l = 1/10 \div 1/5$, нормальные при $f/l = 1/5 \div 1/3$ и крутые или подъемистые при $f/l > 1/3$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В.А.Смирнов, А.С.Городецкий. Строительная механика. М., Стройиздат, 2013 г.
2. В.А.Смирнов, С.А.Иванов, М.А.Тихонов. Строительная механика. М., Стройиздат, 1984 г.
3. А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. М., Высшая школа, 1986 г.
4. Г.К.Клейн и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М., Высшая школа, 1980 г.
5. Н.Н.Анохин. Строительная механика в примерах и задачах. Часть I. Статически определимые системы. Издательство Ассоциации строительных вузов. М., 1999 г.

$$\begin{aligned}\Sigma n = 0; & -Q_B + (V_A - F_1 - F_2 - q \times l) \times \cos\varphi_B + (H_A + F_3) \times |\sin\varphi_B| = 0 \\ Q_B & = (V_A - F_1 - F_2 - q \times l) \times \cos\varphi_B + (H_A + F_3) \times |\sin\varphi_B| \\ Q_B & = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 30) \times 0,684 + (68,3125 + 8) \times 0,73 = \\ & 5,389 \text{кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma m = 0; & -N_B + (V_A - F_1 - F_2 - q \times l) \times |\sin\varphi_B| - (H_A + F_3) \times \cos\varphi_B = 0; \\ N_B & = (V_A - F_1 - F_2 - q \times l) \times |\sin\varphi_B| - (H_A + F_3) \times \cos\varphi_B \\ N_B & = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 30) \times 0,73 - (68,3125 + 8) \times 0,684 = - \\ & 105,90 \text{кН}.\end{aligned}$$

Расчет арок, как обычно, начинается с определения опорных реакций. При этом сначала определяются вертикальные составляющие опорных реакций из условий:

$$\Sigma M_B = 0; \Rightarrow \text{определяем } V_A;$$

$$\Sigma M_A = 0; \Rightarrow \text{определяем } V_B;$$

Проверяется правильность их определения:

$$\Sigma Y = 0.$$

После проверки правильности определения вертикальных составляющих опорных реакций V_A и V_B приступают к определению горизонтальных составляющих опорных реакций, распора H_A и H_B , исходя из того, что момент в замковом шарнире C равен нулю:

$$\Sigma M_C^I = 0; \Rightarrow \text{находим } H_A;$$

$$\Sigma M_C^{II} = 0; \Rightarrow \text{находим } H_B.$$

Простейшая проверка правильности определения распора заключается в следующем:

$$\Sigma X = 0.$$

После определения составляющих опорных реакций V_A , V_B и H_A , H_B можно приступить к определению внутренних усилий в необходимых сечениях арки. Для этого арка по заданному сечению, как бы рассекается на две части. Одна из этих частей остается для определения внутренних усилий, заменяющих влияние удаленной правой или левой части арки, как это показано на рис. 1,4. На рисунке показаны положительные внутренние усилия в К-ом сечении арки.

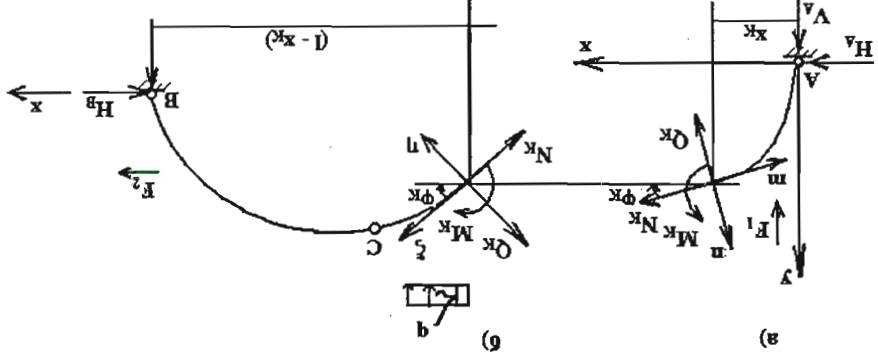


Рис. 1,4. Расчетная схема арки для определения внутренних усилий
 а) расчетная схема левой части арки;
 б) расчетная схема правой части арки;

Для удобства вычисления внутренних усилий Q_K и N_K через центральную точку сечения K проведется ось местной системы координат таким образом, чтобы одна из осей совпала с касательной к оси арки в точке K , а другая — перпендикулярно касательной.

$$M_B = 0$$

$$\sum \eta = 0;$$

$$-Q_B - V_B \times \cos \varphi_B + H_B \times |\sin \varphi_B| = 0$$

$$Q_B = -V_B \times \cos \varphi_B + H_B \times |\sin \varphi_B|;$$

$$Q_B = -73,5(6) \times 0,684 + 76,3125 \times 0,73 = 5,389 \text{ кН.}$$

$$\sum \xi = 0;$$

$$-N_B - V_B \times |\sin \varphi_B| - H_B \times \cos \varphi_B = 0;$$

$$N_B = -V_B \times |\sin \varphi_B| - H_B \times \cos \varphi_B;$$

$$N_B = -73,5(6) \times 0,73 + 76,3125 \times 0,684 = -105,90 \text{ кН}$$

Проверяем внутренние усилия в сечении B.

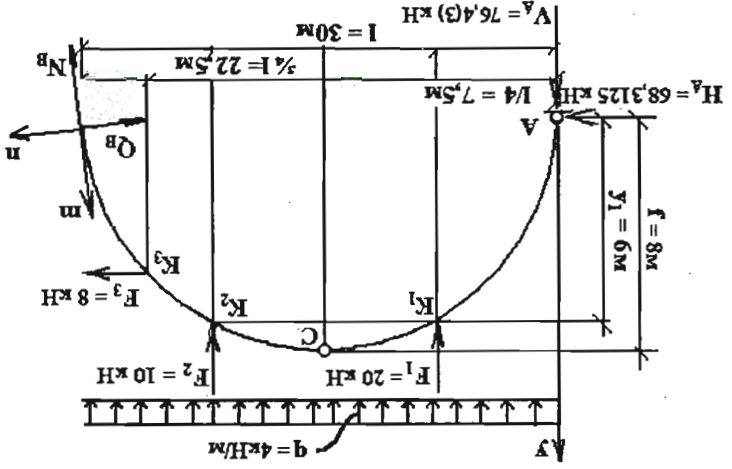


Рис. 2,13. Расчетная схема левой части арки
 для определения внутренних усилий в сечении B.

$$Q_3^I = (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times \cos\varphi_3 + H_A \times |\sin\varphi_3|$$

$$Q_3^I = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 25,61) \times 0,798 + 68,3125 \times 0,602 = -3,569 \text{ кН}$$

$$\Sigma m = 0; \quad -N_3^II + (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times |\sin\varphi_3| - (H_A + F_3) \times \cos\varphi_3 = 0;$$

$$N_3^II = (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times |\sin\varphi_3| - (H_A + F_3) \times \cos\varphi_3$$

$$N_3^II = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 25,61) \times 0,602 - (68,3125 + 8) \times 0,798 = -94,613 \text{ кН}$$

$$N_3^I = (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times |\sin\varphi_3| - H_A \times \cos\varphi_3$$

$$N_3^I = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 25,61) \times 0,602 - 68,3125 \times 0,798 = -88,229 \text{ кН}$$

2.3.6 Определение внутренних усилий в сечении В.

$$\sin\varphi_B = -0,73; \quad \cos\varphi_B = 0,684$$

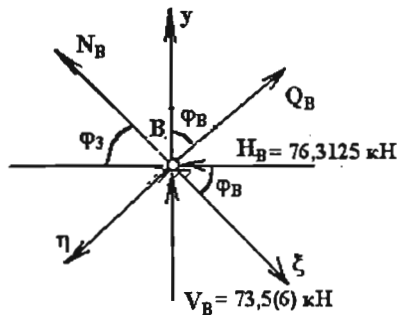


Рис. 2.12 Расчетная схема правой части арки для определения внутренних усилий в сечении В.

Внутренние усилия находятся из следующих условий:

при рассмотрении расчетной схемы левой части арки

$$\Sigma M_K = 0; \Rightarrow \text{определяем } M_K;$$

$$\Sigma n = 0; \Rightarrow \text{находим } Q_K;$$

$$\Sigma m = 0; \Rightarrow \text{вычисляем } N_K;$$

при рассмотрении правой части:

$$\Sigma M_K = 0; \Rightarrow \text{определяем } M_K;$$

$$\Sigma \eta = 0; \Rightarrow \text{находим } Q_K;$$

$$\Sigma \xi = 0; \Rightarrow \text{вычисляем } N_K;$$

Обычно внутренние усилия определяются по одной из частей арки и проверяются рассмотрением другой части.

2. Пример расчета трехшарнирной арки параболического очертания.

Дано: Расчетная схема трехшарнирной арки параболического очертания с внешней нагрузкой; пролет арки $\bar{l} = 30\text{ м}$; стрела подъема арки $f = 8\text{ м}$; равномерно распределенная нагрузка $q = 4\text{ кН/м}$; сосредоточенные нагрузки: $F_1 = 20\text{ кН}$, $F_2 = 10\text{ кН}$ и $F_3 = 8\text{ кН}$ (см. рис.2.1).
 Требуется: определить внутренние усилия M , Q и N в опорных сечениях А и В, в замковом шарнире С и в сечениях K_1 , K_2 и K_3 .

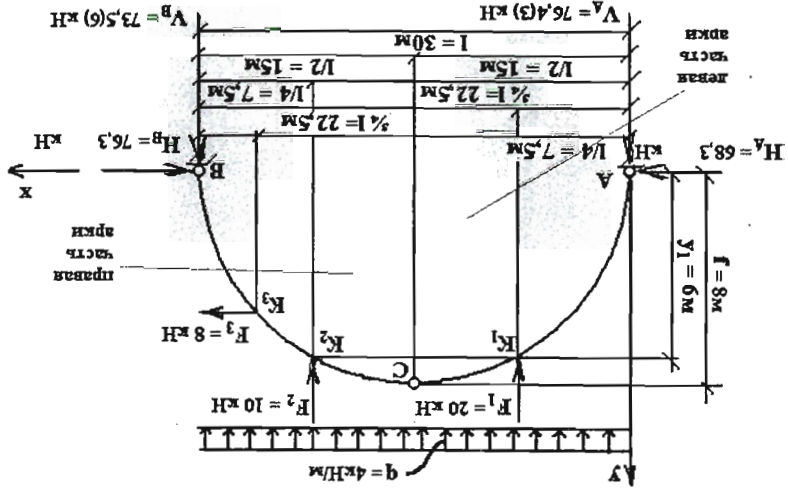


Рис. 2.1. Расчетная схема трехшарнирной арки параболического очертания

Проверка: $N_3 - N_3^I = -F_3 \times \cos\varphi_3$
 $-94,613 - (-88,229) = -8 \times 0,798$
 $-6,384 = -6,384$

Проверяем полученные значения внутренних усилий в сечении K_3 по левой части (рис. 2.11).

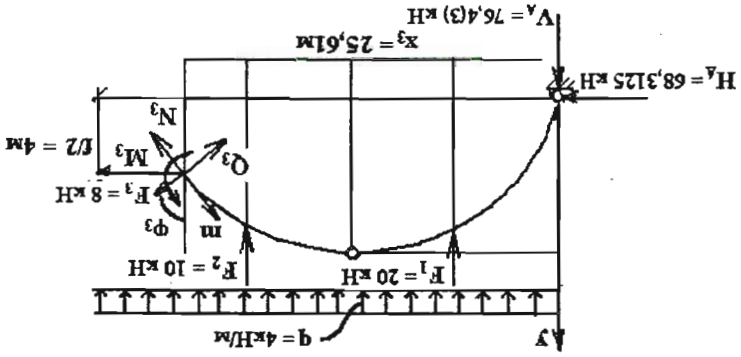


Рис. 2.11. Расчетная схема левой части арки для определения внутренних усилий в сечении K_3

$\sum M_{K3} = 0;$
 $-M_3 + V_A \times x_3 - H_A \times y_3 - F_1 \times (x_3 - l/4) - F_2 \times (x_3 - 3/4 \times l) - q \times x_3^2 / 2 = 0;$
 $M_3 = +V_A \times x_3 - H_A \times y_3 - F_1 \times (x_3 - l/4) - F_2 \times (x_3 - 3/4 \times l) - q \times x_3^2 / 2$
 $M_3 = 76,4(3) \times 25,61 - 68,3125 \times 4 - 20 \times 18,11 - 10 \times 3,11 - 4 \times 25,61^2 / 2 = -20,837\text{ кН} \times \text{м}.$

$\sum n = 0;$
 $-Q_3^I + (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times \cos\varphi_3 + (H_A + F_3) \times |\sin\varphi_3| = 0$
 $Q_3^I = (V_A - F_1 - F_2 - q \times x_3) \times \cos\varphi_3 + (H_A + F_3) \times |\sin\varphi_3|$
 $Q_3^I = (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 25,61) \times 0,798 + (68,3125 + 8) \times 0,602 = 1,247\text{ кН}$

$$\Sigma M_{K3} = 0; \quad M_3 - V_B \times (1 - x_3) + q \times (1 - x_3)^2/2 + H_B \times y_3 = 0;$$

$$M_3 = V_B \times (1 - x_3) - q \times (1 - x_3)^2/2 - H_B \times y_3$$

$$M_3 = 73,5(6) \times 4,39 - 4 \times 4,39^2/2 - 76,3125 \times 4$$

$$M_3 = -20,837 \text{кН} \times \text{м}.$$

$$\Sigma \eta = 0; \quad -Q_3^{\text{II}} - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times \cos\varphi_3 + (H_B - F_3) \times |\sin\varphi_3| = 0$$

$$Q_3^{\text{II}} = - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times \cos\varphi_3 + (H_B - F_3) \times |\sin\varphi_3|;$$

$$Q_3^{\text{II}} = - (73,5(6) - 4 \times 4,39) \times 0,798 + (76,3125 - 8) \times 0,602 = 3,569 \text{кН}.$$

$$Q_3^{\text{I}} = - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times \cos\varphi_3 + H_B \times |\sin\varphi_3|;$$

$$Q_3^{\text{I}} = - (73,5(6) - 4 \times 4,39) \times 0,798 + 76,3125 \times 0,602$$

$$Q_3^{\text{I}} = 1,247 \text{кН}$$

$$\text{Проверка: } Q_3^{\text{I}} - Q_3^{\text{II}} = F_3 \times |\sin\varphi_3|;$$

$$1,247 - (-3,569) = 8 \times 0,602;$$

$$4,816 = 4,816.$$

$$\Sigma \xi = 0; \quad -N_3^{\text{II}} - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times |\sin\varphi_3| - (H_B - F_3) \times \cos\varphi_3 = 0;$$

$$N_3^{\text{II}} = - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times |\sin\varphi_3| - (H_B - F_3) \times \cos\varphi_3;$$

$$N_3^{\text{II}} = - (73,5(6) - 4 \times 4,39) \times 0,602 - (76,3125 - 8) \times 0,798 = -88,229 \text{кН}$$

$$N_3^{\text{I}} = - (V_B - q \times (1 - x_3)) \times |\sin\varphi_3| - H_B \times \cos\varphi_3;$$

$$N_3^{\text{I}} = - (73,5(6) - 4 \times 4,39) \times 0,602 - 76,3125 \times 0,798$$

$$N_3^{\text{I}} = -94,613 \text{кН}$$

РЕШЕНИЕ

2.1. Определение опорных реакций

2.1.1. Определение вертикальных составляющих опорных реакций (балочных реакций).

$$\Sigma M_B = 0; \quad V_A \times 1 - q \times l^2/2 - F_1 \times 3/4 \times 1 - F_2 \times 1/4 + F_3 \times f/2 = 0$$

$$V_A = (q \times l^2/2 + F_1 \times 3/4 \times 1 + F_2 \times 1/4 - F_3 \times f/2)/l$$

$$V_A = (4 \times 30^2/2 + 20 \times 3/4 \times 30 + 10 \times 30/4 - 8 \times 8/2)/30 = 76,4(3) \text{кН}$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -V_B \times 1 + q \times l^2/2 + F_1 \times 1/4 + F_2 \times 3/4 \times 1 + F_3 \times f/2 = 0$$

$$V_B = (q \times l^2/2 + F_1 \times 1/4 + F_2 \times 3/4 \times 1 + F_3 \times f/2)/l$$

$$V_B = (4 \times 30^2/2 + 20 \times 30/4 + 10 \times 3/4 \times 30 + 8 \times 8/2)/30 = 73,5(6) \text{кН}$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0; \quad V_A + V_B - q \times l - F_1 - F_2 = 76,4(3) + 73,5(6) - 4 \times 30 - 20 - 10 = 150 - 150 = 0$$

Полученные значения вертикальных опорных реакций желательно перенести на чертеж расчетной схемы. После проверки вертикальных составляющих опорных реакций приступаем к определению распора.

2.1.2. Определение горизонтальных составляющих

опорных реакций – распора.

Для определения распора H_A составим уравнение суммы моментов сил левой части арки относительно замкового шарнира C (момент в шарнире всегда равен нулю):

$$\sum M^C = 0; -H_A \times f + V_A \times l/2 - q \times l^2/8 - F_1 \times l/4 = 0$$

$$H_A = (V_A \times l/2 - q \times l^2/8 - F_1 \times l/4)/f$$

$$H_A = (76,4(3) \times 30/2 - 4 \times 30^2/8 - 20 \times 30/4)/8 = 68,3 \text{ кН}$$

Для определения H_B :

$$\sum M^C = 0; H_B \times l - V_B \times l^2/2 + q \times l^2/8 + F_2 \times l/4 - F_3 \times f/2 = 0$$

$$H_B = (V_B \times l^2/2 - q \times l^2/8 - F_2 \times l/4 + F_3 \times f/2)/f$$

$$H_B = (73,5(6) \times 30/2 - 4 \times 30^2/8 - 10 \times 30/4 + 8 \times 8/2)/8 = 76,3 \text{ кН}$$

Проверим правильность определения горизонтальных составляющих опорных

реакций H_A и H_B .

Проверка:

$$\sum X = 0; H_A - H_B + F_3 = 68,3 - 76,3 + 8 = 0.$$

$$N_2^I = (V_A - F_1 - q \times 3/4 \times l) \times |\sin \varphi_2| - H_A \times \cos \varphi_2$$

$$N_2^I = (76,4(3) - 20 - 4 \times 22,5) \times 0,471 - 68,3125 \times 0,882 = -76,06 \text{ кН}$$

Полученные результаты внутренних усилий в сечении K_2 совпадают.

2.3.5 Определение внутренних усилий в сечении K_3

$$x_3 = 25,61 \text{ м}; y_3 = f/2 = 4 \text{ м}; \sin \varphi_3 = -0,602; \cos \varphi_3 = 0,798.$$

Рассмотрим правую часть арки (рис. 2.10).

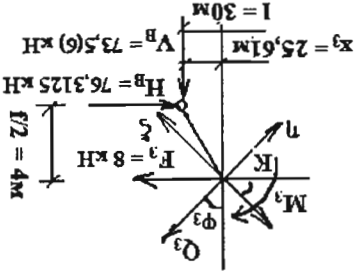


Рис. 2.10. Расчетная схема правой части арки к определению внутренних усилий в сечении K_3 .

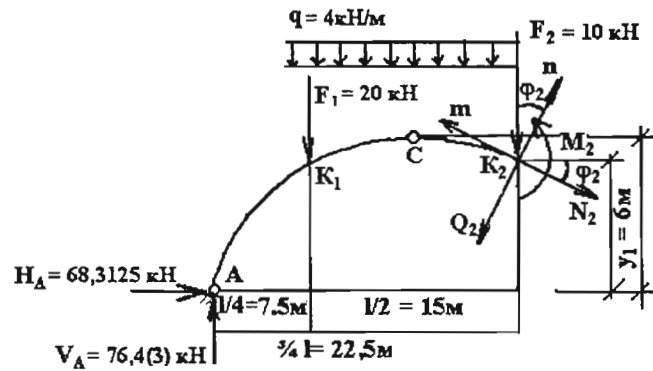


Рис. 2.9. Расчетная схема левой части арки для определения внутренних усилий в сечении K_2

$$\begin{aligned} \Sigma M_{K_2} = 0; & \quad -M_2 + V_A \times l/4 + H_A \times y_1 + q \times l^2/32 - F_3 \times (y_1 - l/2) = 0; \\ M_2 = & \quad V_B \times l/4 - H_B \times y_1 - q \times l^2/32 + F_3 \times (y_1 - l/2) \\ M_2 = & \quad 73,5(6) \times 7,5 - 76,3125 \times 6 - 4 \times 30^2/32 + 8 \times 2 = -2,625 \text{кН} \times \text{м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma n = 0; & \quad -Q_2^{\text{II}} + (V_A - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times l) \times \cos\varphi_2 + H_A \times |\sin\varphi_2| = 0 \\ Q_2^{\text{II}} = & \quad (V_A - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times l) \times \cos\varphi_2 + H_A \times |\sin\varphi_2| \\ Q_2^{\text{II}} = & \quad (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 22,5) \times 0,882 + 68,3125 \times 0,471 = - \\ & \quad 6,25 \text{кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2^{\text{I}} = & \quad (V_A - F_1 - q \times 3/4 \times l) \times \cos\varphi_2 + H_A \times |\sin\varphi_2| \\ Q_2^{\text{I}} = & \quad (76,4(3) - 20 - 4 \times 22,5) \times 0,882 + 68,3125 \times 0,471 = 2,57 \text{кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m = 0; & \quad -N_2^{\text{II}} + (V_A - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times l) \times |\sin\varphi_2| - H_A \times \cos\varphi_2 = 0; \\ N_2^{\text{II}} = & \quad (V_A - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times l) \times |\sin\varphi_2| - H_A \times \cos\varphi_2 \\ N_2^{\text{II}} = & \quad (76,4(3) - 20 - 10 - 4 \times 22,5) \times 0,471 - 68,3125 \times 0,882 = - \\ & \quad 80,77 \text{кН}; \end{aligned}$$

Горизонтальные составляющие опорных реакции вычислены верно.

Вычисленные и проверенные значения опорных реакций желательно перенести на чертеж рис. 2.1 для удобства при определении внутренних усилий в заданных сечениях.

2.2. Определение геометрияческих и тригонометрияческих параметров в заданных сечениях арки.

Уравнение оси арки параболического очертания (кривая второго порядка):

$$Y = 4 \times f \times x / L^2 (L - x).$$

Тангенс угла наклона касательной к оси арки, определяется как первая произвольная уравнения оси арки:

$$\text{tg} \varphi = Y'(x) = 4 \times f / L^2 (L - 2x).$$

Рассмотрим конкретные сечения.

Сечение А. А (0; 0)

$$\text{tg} \varphi_A = 4 \times f / L^2 (L - 2 \times 0) = 4 \times f / L = 1,0(6)$$

$$\varphi_A = \arctg 1,0(6) = 46,848^\circ$$

$$\sin \varphi_A = \sin 46,848^\circ = 0,73;$$

$$\cos \varphi_A = \cos 46,848^\circ = 0,684.$$

$$\sum \eta = 0; -Q_{2II} - (V_B - F_2 - q \times l/4) \times \cos \varphi_2 + (H_B - F_3) \times |\sin \varphi_2| = 0$$

$$Q_{2II} = - (V_B - F_2 - q \times l/4) \times \cos \varphi_2 + (H_B - F_3) \times |\sin \varphi_2|;$$

$$Q_{2II} = - (73,5(6) - 10 - 4 \times 7,5) \times 0,882 + (76,3125 - 8) \times |-0,471| = 2,57 \text{ кН}$$

$$Q_{2II} = - (V_B - q \times l/4) \times \cos \varphi_2 + (H_B - F_3) \times |\sin \varphi_2|;$$

$$Q_{2II} = - (73,5(6) - 4 \times 7,5) \times 0,882 + (76,3125 - 8) \times |-0,471|$$

$$Q_{2II} = -6,25 \text{ кН}$$

Проверка:

$$Q_{2II} - Q_{2II} = F_2 \times \cos \varphi_2$$

$$2,57 - (-6,25) = 10 \times 0,882;$$

$$8,82 = 8,82.$$

$\sum \xi = 0;$

$$-N_{2II} - (V_B - F_2 - q \times l/4) \times |\sin \varphi_2| - (H_B - F_3) \times \cos \varphi_2 = 0;$$

$$N_{2II} = - (V_B - F_2 - q \times l/4) \times |\sin \varphi_2| - (H_B - F_3) \times \cos \varphi_2;$$

$$N_{2II} = - (73,5(6) - 10 - 4 \times 7,5) \times |-0,471| - (76,3125 - 8) \times 0,882 N_{2II} = -76,06 \text{ кН}$$

$$N_{2II} = - (V_B - q \times l/4) \times |\sin \varphi_2| - (H_B - F_3) \times \cos \varphi_2;$$

$$N_{2II} = - (73,5(6) - 4 \times 7,5) \times |-0,471| - (76,3125 - 8) \times 0,882$$

$$N_{2II} = -80,77 \text{ кН}$$

Проверка:

$$N_{2II} - N_{2II} = -F_2 \times |\sin \varphi_2|$$

$$-80,77 - (-76,06) = -10 \times 0,471$$

$$-4,71 = -4,71$$

С целью проверки результатов рассмотрим левую часть арки относительно сечения K₂ (рис. 2.9).

$$\Sigma \xi = 0; \quad -N_C - H_B + F_1 = 0;$$

$$N_C = -H_B + F_1$$

$$N_C = -76,3125 + 8 = -68,3125 \text{ кН}$$

Проверкой доказано, что внутренние усилия Q_C и N_C вычислены верно.

2.3.4 Определение внутренних усилий в сечении K_2

Рассмотрим правую часть арки (рис. 2.8). $\sin \varphi_2 = 0,471$; $\cos \varphi_2 = 0,882$

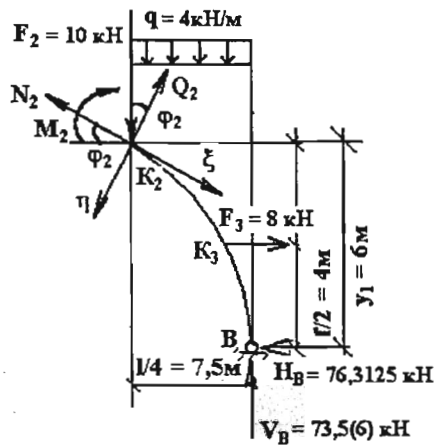


Рис. 2.8. Расчетная схема правой части арки для определения внутренних усилий в сечении K_2 .

$$\Sigma M_{K2} = 0; \quad M_2 - V_B \times l/4 + H_B \times y_1 + q \times l^2/32 - F_3 \times (y_1 - l/2) = 0;$$

$$M_2 = V_B \times l/4 - H_B \times y_1 - q \times l^2/32 + F_3 \times (y_1 - l/2)$$

$$M_2 = 73,5(6) \times 7,5 - 76,3125 \times 6 - 4 \times 30^2/32 + 8 \times 2 = -2,625 \text{ кН} \times \text{м}.$$

Значения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ можно вычислить и по значению $\text{tg} \varphi$ используя следующие зависимости:

$$\sin \varphi = \frac{\text{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}};$$

Сечение В. В (30; 0)

$$\text{tg} \varphi_B = 4 \times f/L^2 (L - 2 \times l) = -4 \times f/L = -4 \times 8/30 = -1,0(6)$$

$$\varphi_B = \arctg(-1,0(6)) = -46,848^\circ$$

$$\sin \varphi_B = \sin(-46,848^\circ) = -\sin 46,848^\circ = -0,73;$$

$$\cos \varphi_B = \cos(-46,848^\circ) = \cos 46,848^\circ = 0,684.$$

Сечение K_1 .

Абсцисса сечения K_1 задана и равна $x_1 = L/4 = 7,5$ м. Определяем ординату K_1 при $x_1 = L/4 = 7,5$ м, тогда $y_1 = 4f/L^2 \times L/4 (L - L/4) = 4f/L^2 \times L/4 \times 3 \times L/4 = 3/4 \times f = 3/4 \times 8 = 6$ м.

Отсюда $K_1 (7,5; 6)$:

$$\text{tg} \varphi_1 = 4 \times f/L^2 (1 - 2 \times l/4) = 4 \times f/L^2 \times l/2 = 2 \times f/L = 2 \times 8/30 = 0,5(3);$$

Сечение К₂

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arctg 0,5(3) = 28,07^\circ \\ \sin \phi_1 &= \sin 28,07^\circ = 0,471; \\ \cos \phi_1 &= \cos 28,07^\circ = 0,882. \end{aligned}$$

Абсцисса $x_2 = 3/4 \times 1 = 22,5$ м, отсюда $y_2 = y_1 = 4 \times l^2 \times 3/4 \times (1-3/4 \times 1) = 3/4 \times l = 3/4 \times 8 = 6$ м.

$$\operatorname{tg} \phi_2 = 4 \times l^2 (1 - 2 \times 3/4 \times 1) = 4 \times l^2 \times (-1/2) = -2 \times l = -2 \times 8/30 = -0,5(3);$$

$$\phi_2 = \arctg (-0,5(3)) = -28,07^\circ;$$

$$\sin \phi_2 = \sin (-28,07^\circ) = -0,471;$$

$$\cos \phi_2 = \cos (-28,07^\circ) = 0,882.$$

Сечение С: С (15; 8)

$$\operatorname{tg} \phi_C = 4 \times l^2 (1 - 2 \times l/2) = 4 \times l^2 \times 0 = 0;$$

Касательная параллельна оси $x \Rightarrow$

$$\phi_C = 0;$$

$$\sin \phi_C = 0;$$

$$\cos \phi_C = 1.$$

Сечение К₃

Вычисляем абсциссу x_3 по заданной ординате $y_3 = l/2 = 4$ м:

$$y_3 = 4l^2 \times x_3 \times (1 - x_3);$$

$$4 = 8/225 \times (30 \times x_3 - x_3^2);$$

$$1 = 2/225 \times (30 \times x_3 - x_3^2);$$

Вычисляем значение поперечной силы Q_C

$$\sum \pi = 0; \quad -Q_C + V_A - F_1 - q \times l/2 = 0$$

$$Q_C = V_A - F_1 - q \times l/2;$$

$$Q_C = (76,4(3) - 20 - 4 \times 30/2) = -3,5(6) \text{ кН}$$

$$\sum m = 0;$$

$$-N_C - H_A = 0;$$

$$N_C = -H_A;$$

$$N_C = -68,3125 \text{ кН}$$

Проверяем полученные результаты по правой расчетной схеме арки (рис.2.7).

$$q = 4 \text{ кН/м}$$

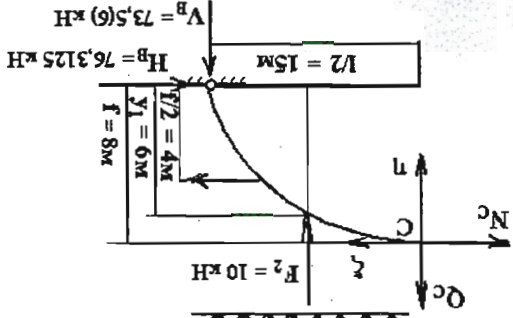


Рис 2.7. Расчетная схема правой части арки для определения внутренних усилий в сечении К₁

$$\sum \pi = 0; \quad -Q_C - V_A + q \times l/2 + F_2 = 0;$$

$$Q_C = -V_A + q \times l/2 + F_2;$$

$$Q_C = -73,5(6) + 4 \times 30/2 + 10 = -3,5(6) \text{ кН}$$

$$\Sigma \xi = 0; \quad -N_1^{\text{II}} + (V_B - F_1 - F_2 - 3/4 \times q \times l) \times \sin\varphi_1 - (H_B - F_3) \times \cos\varphi_1 = 0;$$

$$N_1^{\text{II}} = (V_B - F_1 - F_2 - 3/4 \times q \times l) \times \sin\varphi_1 - (H_B - F_3) \times \cos\varphi_1;$$

$$N_1^{\text{II}} = (73,5(6) - 20 - 10 - 4 \times 3/4 \times 30) \times 0,471 - (76,3125 - 8) \times 0,882 = -82,12 \text{ кН}$$

$$N_1^{\text{II}} = (V_B - F_1 - 3/4 \times q \times l) \times \sin\varphi_1 - (H_B - F_3) \times \cos\varphi_1;$$

$$N_1^{\text{II}} = (73,5(6) - 10 - 4 \times 3/4 \times 30) \times 0,471 - (76,3125 - 8) \times 0,882 = -72,70 \text{ кН}$$

Значения найденных внутренних усилий совпали, следовательно, все вычисления выполнены верно.

2.3.3. Определение внутренних усилий в замковом шарнире С.

Момент в замковом шарнире и вообще в шарнире всегда равен нулю, т.е. $M_C = 0$.

Рассмотрим левую часть арки (рис.2.6).

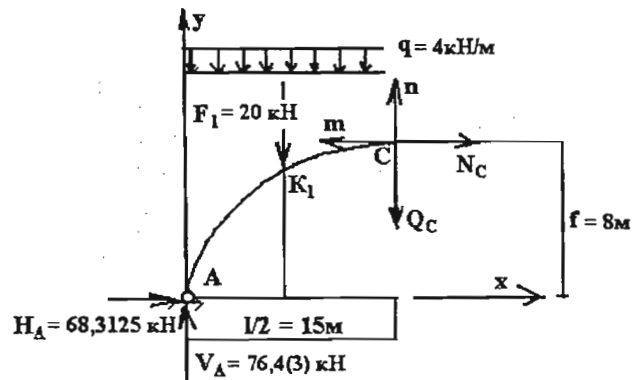


Рис. 2.6. Расчетная схема левой части арки для определения внутренних усилий в сечении С

$$2 \times (x_3 - 30 \times x_3^2) + 225 = 0; \quad 2 \times x_3 - 60 \times x_3^2 + 225 = 0;$$

$$x_{3(1,2)} = (60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 2 \times 225}) / (2 \times 2) = (60 \pm 42,4264) / 4$$

$$x_{3(1)} = 25,61 \text{ м}$$

$$x_{3(2)} = 4,39 \text{ м (не подходит, т.к. } K_3 \text{ находится справа от шарнира С)}$$

Таким образом, $K_3 = (25,61; 4)$

$$\text{tg}\varphi_3 = 4 \times 8 / 30^2 (30 - 2 \times 25,61) = -0,7544(8);$$

$$\varphi_3 = \text{arctg}(-0,7544(8)) = -37,03^\circ;$$

$$\sin\varphi_3 = \sin(-37,03^\circ) = -0,002;$$

$$\cos\varphi_3 = \cos(-37,03^\circ) = 0,798.$$

2.3 *Определение внутренних усилий*

2.3.1. *Определение внутренних усилий*

в опорном сечении А.

Момент в опорном сечении А равен нулю, $M_A = 0$, так как опорой является шарнирно-неподвижная опора. Исходя из этого, ранее были определены вертикальные составляющие опорных реакций V_A и V_B . Таким образом, в сечении А определяются поперечная сила Q_A и нормальное усилие N_A . Сечением А мысленно рассекем арку на две части. Одна из этих частей отбрасывается и ее влияние заменяется неизвестными внутренними усилиями. На рисунке 2.2 показана

расчетная схема левой части арки.

Для удобства определения вводим местную ортогональную систему координат m - n таким образом, чтобы ось m совпала с касательной к оси арки в т.А, а ось n перпендикулярна этой касательной. Задаем положительными направлениями неизвестные Q_A и N_A . Q_A направляется перпендикулярно касательной таким образом, чтобы рассматриваемый участок вращался по часовой стрелке

(положительная поперечная сила).

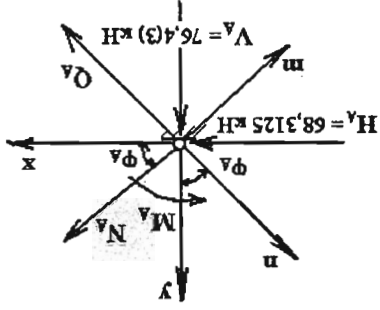
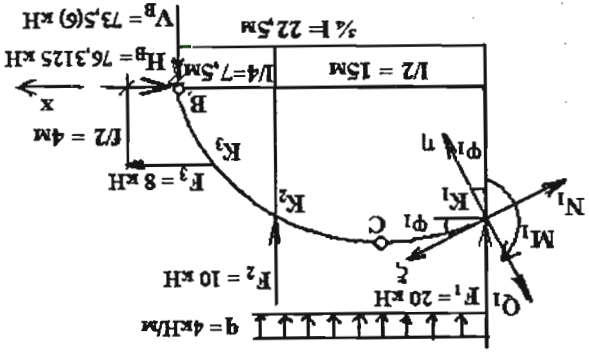


Рис 2.2 Расчетная схема левой части арки для определения внутренних усилий в сечении А.

Рис. 2.5. Расчетная схема правой части арки при определении внутренних усилий в сечении К₁



$$\sum M_{K1} = 0; \quad M_1 - V_B \times 3/4 \times 1 - H_B \times y_1 + q \times 3/4 \times 1 \times 3/8 \times 1 + F_2 \times l/2 - F_3 \times (y_1 - l/2) = 0;$$

$$M_1 = V_B \times 3/4 \times 1 + H_B \times y_1 - q \times 3/4 \times 1 \times 3/8 \times 1 - F_2 \times l/2 + F_3 \times (y_1 - l/2)$$

(2)

$$M_1 = 3/4 \times 73,5(6) \times 30 + 76,3125 \times 6 - 9/32 \times 4 \times 30^2 - 10 \times 30/2 + 8 \times (6 - 4) = 50,875 \text{ kH} \times \text{м.}$$

$$\sum \eta = 0; \quad -Q_1 - (V_B - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times 1) \times \cos \phi_1 - (H_B - F_3) \times \sin \phi_1 = 0$$

$$Q_1 = - (V_B - F_1 - F_2 - q \times 3/4 \times 1) \times \cos \phi_1 - (H_B - F_3) \times \sin \phi_1;$$

$$Q_1 = - (73,5(6) - 20 - 10 - 4 \times 3/4 \times 30) \times 0,882 - (76,3125 - 8) \times 0,471 = 8,779 \text{ kH.}$$

$$Q_1 = -8,861 \text{ kH}$$

$\Delta Q = \Delta Q_1^L - \Delta Q_1^П$, из уравнения (2) вычтем уравнение (1) и получим:

$$\begin{aligned} Q_1^L - Q_1^П &= F_1 \times \cos\varphi_1; \\ 8,779 - (-8,861) &= 20 \times 0,882; \\ 17,64 &= 17,64 \text{ кН} \end{aligned}$$

Предварительная проверка определения скачка в эпюре по вычисленным значениям поперечных сил выполнена и совпадает со значением $F_1 \times \cos\varphi_1$.

Определяем значение нормального усилия с учетом действия сосредоточенной силы F_1 .

$$\begin{aligned} \Sigma m = 0; \quad -N_1^П - (V_A - q \times l/4 - F_1) \times \sin\varphi_1 - H_A \times \cos\varphi_1 &= 0; \\ N_1^П &= - (V_A - q \times l/4 - F_1) \times \sin\varphi_1 - H_A \times \cos\varphi_1 \quad (3) \\ N_1^П &= - (76,4(3) - 4 \times 7,5 - 20) \times 0,471 - 68,3125 \times 0,882 = -72,70 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1^Л &= - (V_A - q \times l/4) \times \sin\varphi_1 - H_A \times \cos\varphi_1 \quad (4) \\ N_1^Л &= - (76,4(3) - 4 \times 7,5) \times 0,471 - 68,3125 \times 0,882 \\ N_1^Л &= -82,12 \text{ кН} \end{aligned}$$

Промежуточная проверка ((4)-(3)):

$$\begin{aligned} N_1^Л - N_1^П &= -F \times \sin\varphi; \\ -82,12 - (-72,70) &= 20 \times 0,471 \\ -9,42 &= -9,42 \end{aligned}$$

Для проверки полученных значений внутренних усилий M_1 , Q_1^L , $Q_1^П$, $N_1^Л$ и $N_1^П$ рассмотрим левую часть арки (см. рис. 2.5).

Для вычисления значений внутренних усилий записываем уравнения статики

$$\begin{aligned} \Sigma n = 0; \quad -Q_A + V_A \times \cos\varphi_A - H_A \times \sin\varphi_A &= 0 \\ Q_A &= V_A \times \cos\varphi_A - H_A \times \sin\varphi_A \\ Q_A &= 76,4(3) \times 0,684 - 68,3125 \times 0,73 = 2,41 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m = 0; \quad -N_A - V_A \times \sin\varphi_A - H_A \times \cos\varphi_A &= 0 \\ N_A &= -V_A \times \sin\varphi_A - H_A \times \cos\varphi_A \\ N_A &= -76,4(3) \times 0,73 - 68,3125 \times 0,684 = 102,52 \text{ кН} \end{aligned}$$

С целью проверки полученных значений внутренних усилий рассмотрим правую часть арки сечения А, представленную на рис. 2.3.

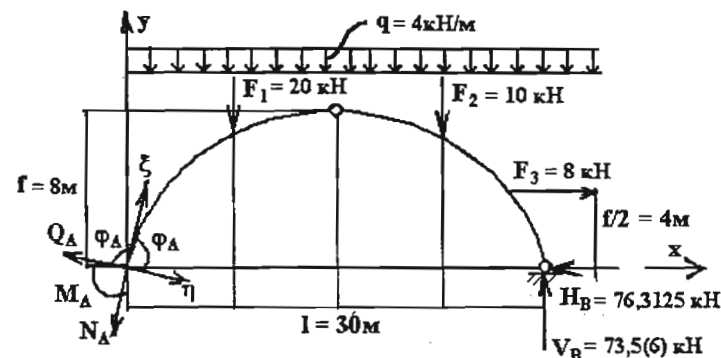


Рис 2.3. Расчетная схема правой части арки для определения внутренних усилий в сечении А.

В сечении А вводим блок неизвестных, положительно направленных внутренних усилий, и местную ортогональную систему координат ξ - η .

$$\begin{aligned} M_A &= 0; \\ \text{Определяем } Q_A. \end{aligned}$$

$$\sum \eta = 0; \quad -Q_A + (-V_B + F_1 + F_2 + q \times l) \times \cos\varphi_A + (-H_B + F_3) \times \sin\varphi_A = 0;$$

$$Q_A = (-V_B + F_1 + F_2 + q \times l) \times \cos\varphi_A + (-H_B + F_3) \times \sin\varphi_A$$

$$Q_A = (-73,5(6) + 20 + 10 + 4 \times 30) \times 0,684 + (-76,3125 + 8) \times 0,73 =$$

$$2,41 \text{ кН}$$

$$\sum \xi = 0; \quad -N_A + (V_B - F_1 - F_2 - q \times l) \times \sin\varphi_A + (-H_B + F_3) \times \cos\varphi_A = 0;$$

$$N_A = (V_B - F_1 - F_2 - q \times l) \times \sin\varphi_A + (-H_B + F_3) \times \cos\varphi_A$$

$$N_A = (73,5(6) - 20 - 10 - 4 \times 30) \times 0,73 + (8 - 76,3125) \times 0,684$$

$$N_A = -102,52 \text{ кН}$$

Полученные результаты и результаты проверки совпадают. Вычисления

сделаны верно.

2.3.2 Определение внутренних усилий в сечении K₁

$$K_1 (7,5;6); \sin\varphi_1 = 0,471; \cos\varphi_1 = 0,882$$

Рассмотрим левую часть арки относительно сечения K₁ (см. рис. 2.4).

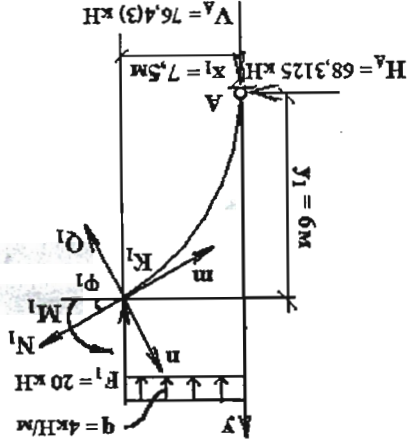


Рис. 2.4. Расчетная схема левой части арки для определения внутренних усилий в сечении K₁.

Определяем момент M₁:

$$\sum M_{K1} = 0; \quad -M_1 + V_A \times x_1 - H_A \times y_1 - q \times l/8 \times l/8 = 0;$$

$$M_1 = V_A \times x_1 - H_A \times y_1 - q \times l^2/32$$

$$M_1 = 76,4(3) \times 7,5 - 68,3125 \times 6 - 4 \times 30^2/32 = 50,875 \text{ кН} \times \text{м}$$

Вычисляем значение поперечной силы Q_k. В сечении K₁ действует

средоточенная вызываемая сила, то в эпюре Q и N будут возникать скачки.

Поэтому необходимо определить их, зная левое и правое сечения.

Запишем уравнение для сил правее сечения, т.е. с учетом сосредоточенной

силы F₁:

$$\sum \eta = 0; \quad -Q_{1II} + (V_A - q \times l/4 - F_1) \times \cos\varphi_1 - H_A \times \sin\varphi_1 = 0$$

$$Q_{1II} = (V_A - q \times l/4 - F_1) \times \cos\varphi_1 - H_A \times \sin\varphi_1; \quad (1)$$

$$Q_{1II} = (76,4(3) - 4 \times 7,5 - 20) \times 0,882 - 68,3125 \times 0,471 = -8,861 \text{ кН}$$

Уравнение для сил левее сечения (без учета F₁):

$$-Q_{1I} + (V_A - q \times l/4) \times \cos\varphi_1 - H_A \times \sin\varphi_1 = 0;$$

$$Q_{1I} = (V_A - q \times l/4) \times \cos\varphi_1 - H_A \times \sin\varphi_1; \quad (2)$$

$$Q_{1I} = (76,4(3) - 4 \times 7,5) \times 0,882 - 68,3125 \times 0,471;$$

$$Q_{1I} = 8,779 \text{ кН}$$

После определения Q_{1II} и Q_{1I} желательно выполнить предварительную

проверку, связанную с определением величины скачка. Так как непосредственно в

сечении K₁ приложена сосредоточенная внешняя сила F₁.