

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
И
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Г.М. ЧЕНТЕМИРОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ
ИПОСИХ РАМ.

МОСКВА 2015

YJMK 624.04

YJMK 519.254

YJMK 519.6 BBK B162a73

YJMK 51-3



СОДЕРЖАНИЕ.

	стр.
I. Общие сведения о рамках	2
2. Расчет простых рам.	3
2.1. Пример расчета простых рам.	7
3. Расчет трехшарнирных рам.	14
3.1. Пример расчета трехшарнирной рамы. . .	19
4. Расчет составных рам.	25
4.1. Пример расчета составной рамы.	29
Л и т е р а т у р а	43

I. OEMME GRIMMEN O PAMA.

1. B.A.Cmynhob, A.C.Ilopoueuken. Ctpontephra Mexahnika. M,
2. B.A.Cmynhob, C.A.Mbaheb, M.A.Tinoxob. Ctpontephra Mexahnika. M, Ctponn3at, 1984 r.
3. A.B.Zapko, H.H.Ulathounhukob. Ctpontephra Mexahnika. M, Bicuera ukora, 1986 r.
4. T.K. Kienh n up. Pykrogoacbro k tpahtneckm sahatnuk no kpyc ctpontephra Mexahnika. M, Bicuera ukora, 1980 r.
5. H.H.Ahoxn. Ctpontephra Mexahnika b tpmepax n saatax. Hactb. I. Ctpontephra Mexahnika optejemnike cncrmebi. H3aterepbro Accounjunnin ctponterephra by3ob. M, 1999 r.

004ho pamae roctyjunn upemtazmato good upo-
ctpachcteennie onctema, kotope e nekax yipomenha a doib-
mnhctee ctyaae mokho pacmalyndarts kar mocoine, ecim aro
bpema heodxozimmo otmetnib, tyo B. tuzartalum oipmnhctee
cyl4abe upmehatca ctanlecken heougejekame pamae kar gorie
3kohomnhake. B. hactowam noocdn pacmalyndartsa pacget

pa3mnyhxx olop n fythwemthero.
hxx n lopmnhchxx 3ashin, B. roctyjunn scckar, mocois,
tepacbre. Ohn ncohopayta a kapracax kinhx, oolmetreh-
Pamae roctyjunn migois upmehawto a ctpon -

upgretne, mhoronporetne, ohnataxne, mhorataxne n t.a.
Pama mmet pa3mnyhxx leomtngenecke cxemh: ohno-

jo uehrya olopa pntera.
Bcgotoy pama h3ahbecta dcctornne ot uehrya olopa ctionru.
ctohne mehly ocam. ctoker nnn Mexuy uehrya olopa pntera.
Bcgotoy pama h3ahbecta pac-
abatctac uporet n Bcgotoy. Bcgotoy pama h3ahbecta pac-
ochobhmn leomtngeneckm xapaktegncitkam pama
nnu onikne k lognsothaibomy pacdonoxehemn ctepkun pama.
Baraca Bepdkarabne ctepkun, a. pnteran- lognsothaibne
Pama cocotont n3 ctoker n pnteran. Ctonkamn haat
tar n noocne jefogmamnn.

upmehakamn ctepkun nockdastecc, kar jo jefogmamnn,
yipgyro-ouatannamn. B. xectrix y3ax 3aannamn nohgot
coclunhacta Mexuy good xectrixn y3axam. Hekotopre
cncrme, cocotowam n3 ctepkhen, kotope e ochobhmon
Pama h3ahbecta leomtngenecken henmehremam

у - н и й у з е л (рис.4.6д) .

$$\sum X = -N_6 - 7,5 = 0; \quad N_6 = -7,5 \text{ кН}.$$

Усилие N_6 получилось такое же как и при рассмотрении предыдущего узла, что является промежуточной проверкой.

$$\begin{aligned} \sum Y &= -N_8 + N_4 - 19 = 0; \\ N_8 &= N_4 - 19 = -30,1(3) - 19 = \\ &= -49,1(3) \text{ кН}. \end{aligned}$$

По полученным нормальным усилиям в стержнях составной рамы строится последняя эпюра – эпюра нормальных усилий (N) , представленная на рис.4.4в.

2. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ РАМ.

Простая рама или ломаная балка представляют собой геометрически неизменяемую, статически определимую стержневую систему, состоящую из двух или трёх стержней, жестко соединённых между собой в узлах, с шарнирно-подвижной и шарнирно неподвижной опорами (см. рис.2.1).

Аналитический расчёт такой рамы заключается в определении внутренних усилий, изгибающего момента, по-перечной и продольной сил, от заданных внешних воздействий и в построении соответствующих эпюр на геометрической схеме рамы по осям стоек и ригелей.

На эпюре моментов (M) знаки обычно не ставятся, так как ординаты значений изгибающих моментов обязательно откладываются со стороны растянутых волокон. В то же время момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна для ригелей и правые – для стоек (рис.2.2).

При построении эпюр моментов полезно помнить следующие правила, которые облегчают построение и проверку правильности построения:

- 1) на прямолинейном ненагруженном участке стержня эпюра (рис.2.3а) моментов всегда прямолинейная;
- 2) в точке приложения сосредоточенного внешнего момента эпюра имеет скачок численно равный величине этого момента (рис.2.3б);
- 3) в точке приложения сосредоточенной силы, линия действия которой перпендикулярна оси стержня, эпюра изгибающих моментов всегда имеет перелом, направленный остриём в сторону действия этой силы (рис.2.3в);
- 4) на участке действия равномерно-распределённой нагрузки σ , эпюра изгибающих моментов имеет очертание кривой второго порядка (параболы) с выпуклостью, направленной в сторону действия нагрузки, и со стрелкой в середине любого участка длиной a равной $\frac{\sigma t^2}{8}$ (рис.2.3г).

Любопытно, что схема изображена в виде квадрата, а не в виде трапеции.

Приложим к верхней горизонтальной стороне силу M , приложенную в центре, и определим реакцию в нижней горизонтальной стороне. Для этого предположим, что в точке A имеется подвижный шарнир, а в точке B — статический. Тогда в точке A действует сила $N_1 = 3,2 \text{ кН}$, направленная вправо, и момент $M_1 = 4,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$. В точке B действует сила $N_2 = -9,8(6) \text{ кН}$, направленная влево, и момент $M_2 = 0$.

Составим уравнения равновесия для верхней горизонтальной стороны:

$$\sum F_x = N_1 - 3,2 = 0; \quad N_1 = 3,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = -N_2 \cdot l + M_1 = 0; \quad N_2 = -9,8(6) \text{ кН}.$$

Составим уравнения равновесия для нижней горизонтальной стороны:

$$\sum F_x = -N_3 + 3,2 = 0; \quad N_3 = 3,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = -N_2 \cdot l + M_2 = 0; \quad N_2 = -9,8(6) \text{ кН}.$$

Составим уравнения равновесия для левой вертикальной стороны:

$$\sum F_y = -N_4 = 0; \quad N_4 = 0.$$

$$\sum M_A = -N_4 \cdot l + M_1 = 0; \quad N_4 = 0.$$

Составим уравнения равновесия для правой вертикальной стороны:

$$\sum F_y = -N_5 = 0; \quad N_5 = 0.$$

$$\sum M_B = -N_5 \cdot l + M_2 = 0; \quad N_5 = 0.$$

Итак, получены равенства $N_1 = N_3 = 3,2 \text{ кН}$, $N_2 = N_4 = -9,8(6) \text{ кН}$ и $N_5 = 0$.

Последнее выражение $N_4 = 0$ соответствует предположению о том, что параллельные горизонтальные стороны AB и CD являются абсолютно жесткими. Поэтому, т.к. опора C — логарифмическая, то параллельные горизонтальные стороны AB и CD не могут быть абсолютно жесткими.

Рис. 2.2. Двухсторонне напряженные
материалы:
а) сдвиги материала;
б) сдвиги материала с трением;

в) сдвиги материала с трением, но не имеющие зазора между ними;

г) сдвиги материала с трением, но имеющие зазор.

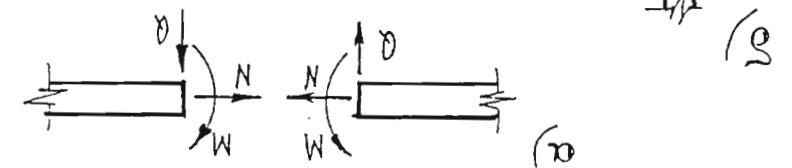
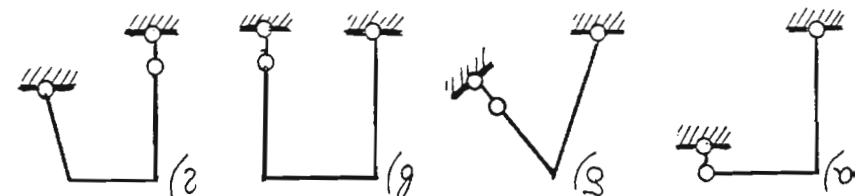


Рис. 2.1. Схема напряжений.



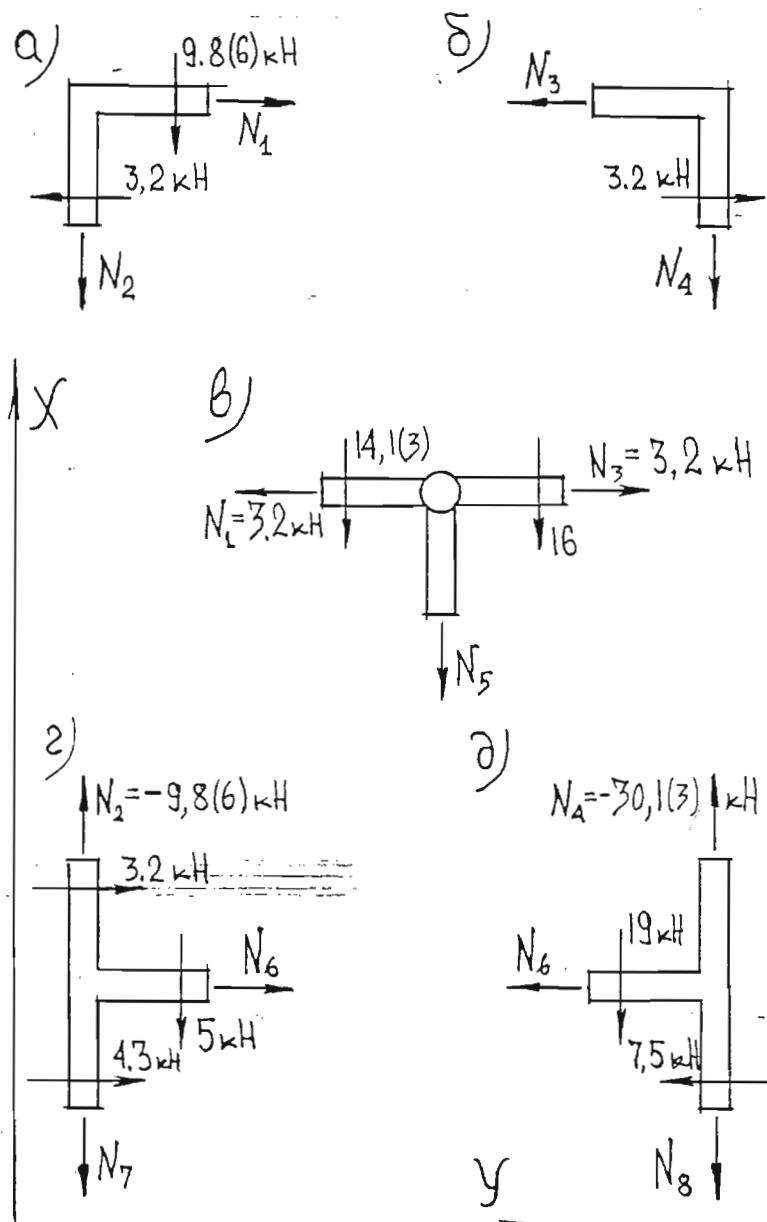
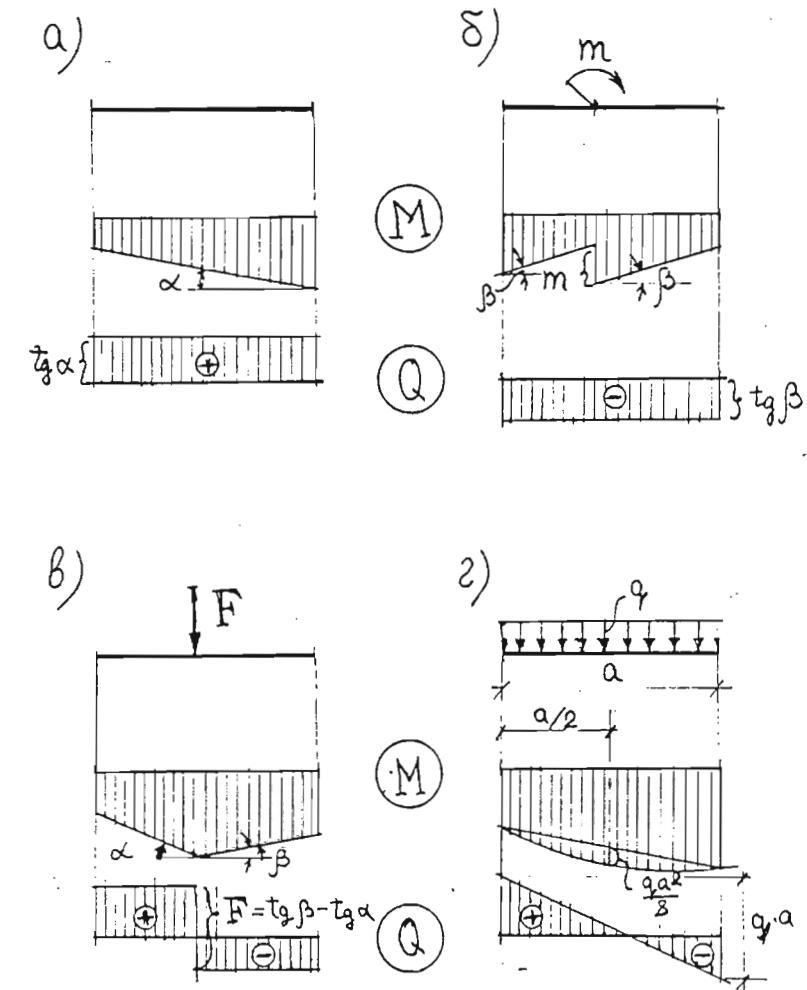
Рис.4.6. К вычислению нормальных усилий N .

Рис.2.3. Фрагменты эпюр изгибающих моментов (M) и поперечных сил (Q) при различных внешних воздействиях:

- ненагруженный участок;
- при действии сосредоточенного момента;
- при действии сосредоточенной силы;
- при действии равномерно – распределённой нагрузки.

По результатам выполненных расчётов строим эпюру M для всей составной рамы (см. рис.4.4а) и проверяем равновесие узлов M , N , O , L .

Рассмотрим узел M , вырезав его из данной рамы и приложив все действующие моменты из эпюры M (рис.4.5а). Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_M = M_{6(8)} + M_{7(2)} - M_{8(0)} = \\ = 5,6 + 6,4 - 12 = 0.$$

Условие равновесия удовлетворяется.

Узел N (рис.4.5б).

$$\sum M_N = -M_{8(6)} + M_{9(4)} = -30 + 30 = 0.$$

Узел O (рис. 4.5в).

$$\sum M_O = M_{3(4)} - M_{4(0)} = 12,8 - 12,8 = 0.$$

Узел L (рис.4.5г).

$$\sum M_L = M_{1(4)} - M_{2(10)} = 32 - 32 = 0.$$

Условия равновесия для всех узлов рамы выполняются, следовательно эпюра M построена верно и можно приступить к вычислению поперечных сил по эпюре моментов M по участкам, номера которых указаны (в кружочках) на эпюре моментов (см. рис.4.4а).

Рассмотрим I - й участок.

Эпюра M на этом ненагруженном участке линейная и, следовательно, значение Q вычисляется по формуле, представленной на рис.4.1а:

$$Q_1 = (M_{\text{пр}(B)} - M_{\text{л}(A)})/\Delta l = (-32 - 0)/10 = -3,2 \text{ кН}.$$

2 - ой участок.

Данный участок загружен равномерно распределённой нагрузкой, тогда вычисления Q_2^I и Q_2^{II} выполняются по формулам рис.4.1г или в.

$$Q_2^I = q \cdot l/2 + (M_B - M_A)/l = 4 \cdot 4/2 + (32 - 0)/4 = 16 \text{ кН};$$

2.1. ПРИМЕР РАСЧЁТА ПРОСТОЙ РАМЫ.

Построить эпюры M , Q и N для рамы, представленной на рис.2.4.

РЕШЕНИЕ. Прежде, чем приступить к расчёту следует выполнить кинематический анализ и убедиться, что заданная система неизменяемая. Данная рама может быть представлена как один жесткий диск, прикреплённый к земле тремя опорными стержнями. Эти опорные стержни непараллельны и не пересекаются в одной точке, следовательно данная рама неизменяемая и можно приступать к её расчёту.

Расчёт начинается с определения опорных реакций, которые находятся из условия равновесия. Реакции V_A и V_B определяются из уравнений $\sum M_C = 0$ и $\sum M_D = 0$ соответственно. Горизонтальная составляющая H_A находится из условия $\sum X = 0$. При составлении этих уравнений равновесия примем, что моменты, действующие по ходу часовой стрелки, будем считать положительными, а против - отрицательными.

$$\begin{aligned} \sum M_C &= V_A \cdot L - m - F \cdot l + q \cdot \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{l}{2} \right) = 0; \\ V_A &= \frac{m + F \cdot l - q \cdot \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} + 0,5 \cdot \frac{h}{2} \right)}{L} = \\ &= \frac{20 + 40 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot (5 + 0,5 \cdot 5)}{8} = 3,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum M_D = -V_B \cdot L - m + F \cdot l + q \cdot \frac{h}{2} \cdot 1,5 \cdot \frac{h}{2} = 0;$$

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{-m + F \cdot l + 1,5 \cdot q \cdot \frac{h^2}{2}}{L} = \\ &= \frac{-20 + 40 \cdot 4 + 1,5 \cdot 4 \cdot 5^2}{8} = 36,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum X = -H_A + q \cdot \frac{h}{2} = 0; \quad H_A = q \cdot \frac{h}{2} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ кН}.$$

FIG. 2.5. K определению вытеснения γ-капли

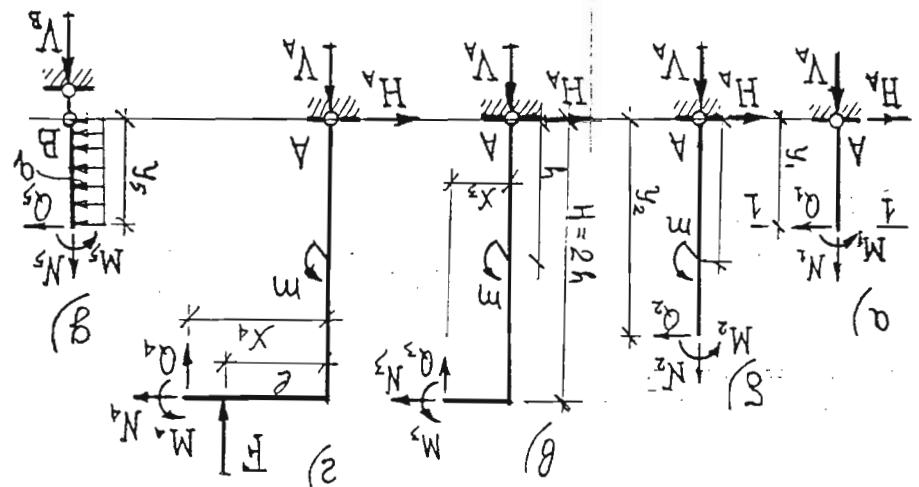
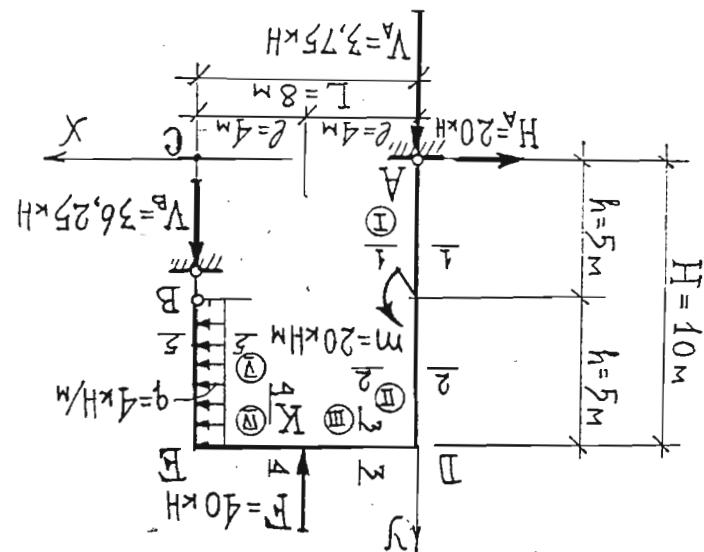
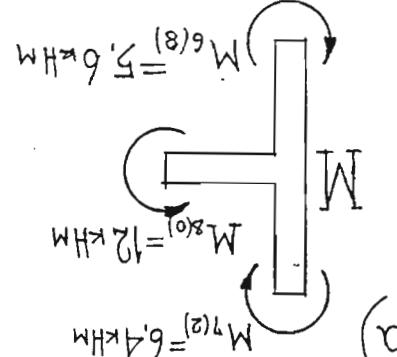
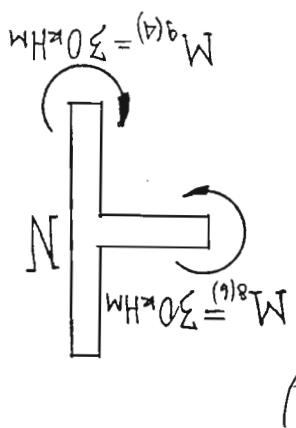
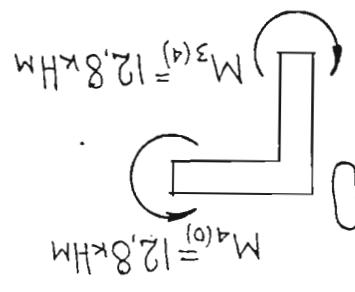
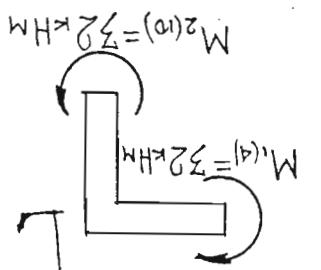


FIG. 2.4. Определение сдвигов определения



до суперкритической момента M (FIG. 4.4a).

FIG. 4.5. К определению параметров якоря M , N , O и L .



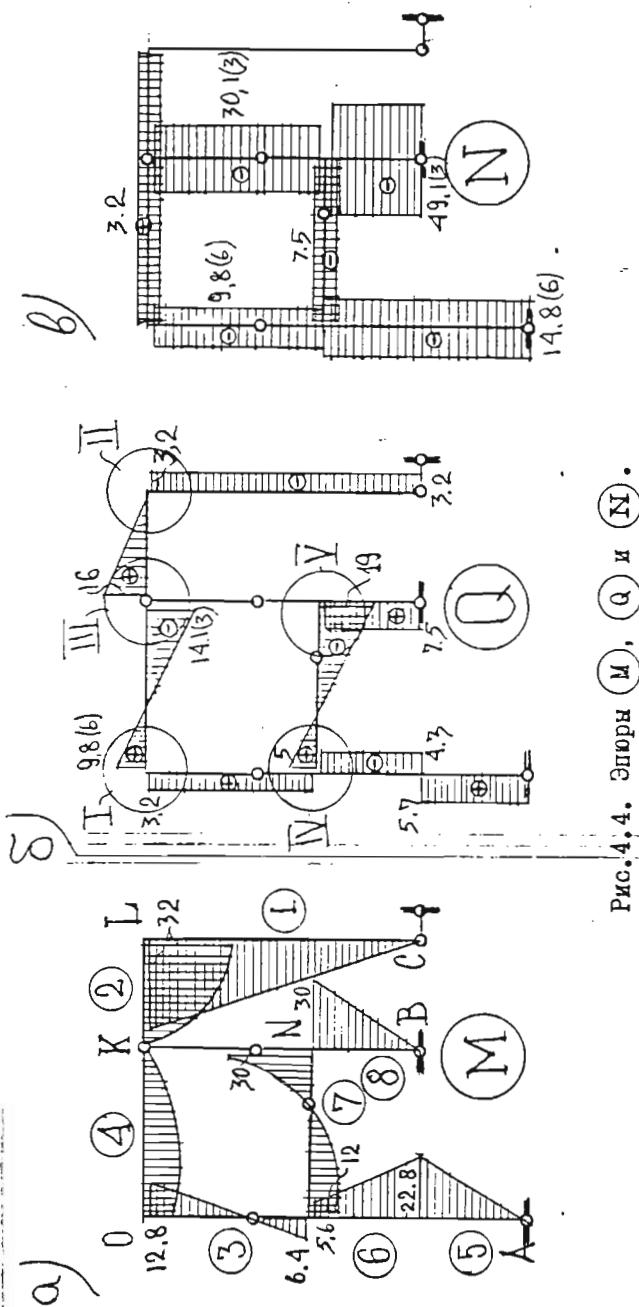


Рис. 4.4. Эпюры M , Q и N .

Все реакции получились положительные и, следовательно, их действительные направления совпадают с принятymi.

Для проверки правильности вычисления реакций можно составить уравнение суммы моментов относительно произвольной точки плоскости рамы, относительно которой моменты от найденных реакций не будут равны нулю.

$$\text{Например: } \sum M_K = V_A \cdot l + H_A \cdot h - m \cdot g \cdot \frac{l^2}{2} - V_B \cdot l = \\ = 3.75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 4 \cdot 5^2 / 2 - 36.25 \cdot 4 = 0.$$

Можно выполнить и более простую проверку, только для вертикальных составляющих опорных реакций V_A и V_B , которая осуществляется как

$$\sum y = V_A + V_B - F = 3,75 + 36,25 - 40 = 0.$$

Таким образом мы подтвердили правильность определения опорных реакций, после чего можно приступить к вычислению внутренних усилий M , Q и N . Для этого разбиваем раму на участки по характеру внешних силовых воздействий, как это показано римскими цифрами на рис. 2.4. Всего получилось пять участков.

Разрезаем раму на две части по одному из участков и отбрасываем одну из частей заменяя её действие внутренними силовыми факторами M , Q и N . Для оставшейся, левой части, составляем три уравнения статического равновесия всех сил, действующих на эту часть. Из этих уравнений определяем искомые M , Q и N .

Рассмотрим I - й участок (рис.2.5а). Неизвестным внутренним усилиям M_1 , Q_1 и N_1 даем положительные направления, после чего переходим к определению этих усилий.

Величину и действительное направление изгибающего момента M , найдём из условия равновесия моментов относительно I-го сечения:

$$\sum M_{ij} = -M_i + H_A \cdot y_i = 0,$$

откуда

$$M_1 = H_A \cdot y_1 .$$

$$\begin{aligned}\sum Y &= V_A + V_B - q \cdot 5 \alpha - q \cdot 3 \alpha = \\ &= 14,8(6) + 49,1(3) - 4 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = \\ &= 64 - 64 = 0.\end{aligned}$$

Реакции найдены верно, приступаем к вычислению моментов и построению эпюры M .

Рассмотрим ломаную балку I, которая разбивается на два участка: первый – горизонтальный стержень KL и второй – вертикальный CL (см. рис.4.3а).

Участок I, $0 \leq X \leq 4\text{ м}$.

$$M_1 = V_K \cdot X - q \cdot X^2 / 2;$$

$$\text{при } X = 0, \quad M_{1(0)} = 0;$$

$$\text{при } X = 4, \quad M_{1(4)} = 16 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 / 2 = 32 \text{ кНм}.$$

Эпюра изгибающих моментов на I-ом, горизонтальном участке имеет форму параболы.

Участок 2, $0 \leq Y \leq 10 \text{ м}$.

$$M_2 = - H_C \cdot Y;$$

$$\text{при } Y = 0, \quad M_{2(0)} = 0;$$

$$\text{при } Y = 10, \quad M_{2(10)} = - 3,2 \cdot 10 = - 32 \text{ кНм}.$$

Рама II (рис.4.3б).

Участок 3, $0 \leq Y \leq 4 \text{ м}$.

$$M_3 = H_E \cdot Y;$$

$$\text{при } Y = 0, \quad M_{3(0)} = 0;$$

$$\text{при } Y = 4, \quad M_{3(4)} = 3,2 \cdot 4 = 12,8 \text{ кНм}.$$

Участок 4, $0 \leq X \leq 6 \text{ м}$.

$$M_4 = H_E \cdot 4 + V_E \cdot X - q \cdot X^2 / 2;$$

$$\text{при } X = 0, \quad M_{4(0)} = M_{3(4)} = 12,8 \text{ кНм};$$

$$\text{при } X = 6, \quad M_{4(6)} = 12,8 + 9,8(6) \cdot 6 - 4 \cdot 6^2 / 2 = 0.$$

Участок III, $0 \leq X \leq 4\text{ м}$ (рис.2.5в).

$$\sum M_3 = - M_3 + V_A \cdot X_3 + H_A \cdot H - M = 0,$$

$$M_3 = V_A \cdot X_3 + H_A \cdot H - M;$$

$$X_3 = 0, \quad M_{3(0)} = H_A \cdot H - M = 20 \cdot 10 - 20 = 180 \text{ кНм};$$

$$X_3 = 4\text{ м}, \quad M_{3(4)} = 3,75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 20 = 195 \text{ кНм}.$$

$$\sum Y = - Q_3 + V_A = 0; \quad Q_3 = V_A = 3,75 \text{ кН.}$$

$$\sum X = N_3 - H_A = 0; \quad N_3 = H_A = 20 \text{ кН.}$$

Участок IV, $4 \leq X \leq 8\text{ м}$ (рис.2.5г).

$$\sum M_4 = - M_4 + V_A \cdot X_4 + H_A \cdot H - M - F(X_4 - 4) = 0;$$

$$M_4 = V_A \cdot X_4 + H_A \cdot H - M;$$

$$X_4 = 4\text{ м}, \quad M_{4(4)} = M_{3(4)} = 3,75 \cdot 4 + 20 \cdot 10 - 20 = 195 \text{ кНм};$$

$$X_4 = 8\text{ м}, \quad M_{4(8)} = 3,75 \cdot 8 + 20 \cdot 10 - 20 - 40(8 - 4) = 50 \text{ кНм}.$$

$$\begin{aligned}\sum Y &= - Q_4 + V_A - F = 0; \quad Q_4 = V_A - F = \\ &= 3,75 - 40 = 36,25 \text{ кН.}\end{aligned}$$

$$\sum X = N_4 - H_A = 0, \quad N_4 = H_A = 20 \text{ кН.}$$

Участок V, $0 \leq Y \leq 5\text{ м}$ (рис.2.5д).

$$\sum M_5 = - M_5 - q Y_5^2 / 2 = 0; \quad M_5 = - q Y_5^2 / 2;$$

$$Y_5 = 0, \quad M_{5(0)} = 0;$$

$$Y_5 = 5\text{ м}, \quad M_{5(5)} = - 4 \cdot 5^2 / 2 = - 50 \text{ кНм.}$$

$$\sum X = Q_5 + q Y_5; \quad Q_5 = - q Y_5;$$

$$Y_5 = 0, \quad Q_{5(0)} = 0;$$

$$Y_5 = 5\text{ м}, \quad Q_{5(5)} = - 20 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = N_5 + V_B = 0, \quad N_5 = - V_B = - 36,25 \text{ кН.}$$

В соответствии с полученными значениями внутренних усилий строятся эпюры M , Q и N , показанные на рис.2.6.

Как видно из примера расчёт рамы связан с большим количеством вычислений, которые могут привести к ошибочным результатам, поэтому полученные значения M , Q и N следует проверить, используя другие уравнения

$$\begin{aligned}
 & = -5,7 - 7,5 + 3,2 + 10 = -13,2 + 13,2 = 0 ; \\
 & \Sigma x = -H^A - H^B + H^C + F = \\
 & = 7,5 \text{ кН} . \\
 & H^B = (324,8 - 3V^B \cdot a) / (2h) = (324,8 - 3 \cdot 49,1(3) \cdot 2) / (2 \cdot 2) = \\
 & = 104,8 \text{ кН} . \\
 & \text{Балансиране напрежение при сечката на горната хоризонтална ребра} \\
 & \text{шарнир: } \\
 & V^B = 393,0(6) / (4 \cdot 2) = 49,1(3) \text{ кН} . \\
 & -4V^B_0 + 393,0(6) = 0 ; \\
 & -V^B_0 + 98,2(6) = 0 ; \\
 & \left. \begin{aligned} & -V^B \cdot a + 2H^B h + 68,2(6) = 0 ; \\ & -3V^B \cdot a - 2H^B h + 324,8 = 0 , \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned} & \Sigma M^B = -V^B \cdot a + H^B \cdot 2h + q \cdot a^2 / 2 + V^B \cdot a = 0 ; \\ & +V^B \cdot 3a + H^B 2a + F \cdot 2a + H^E \cdot 5h + q \cdot 3a \cdot 1,5a + \end{aligned} \right\} \\
 & \Sigma M^A = -V^B \cdot 3a - H^B 2h + F \cdot 2a + H^E \cdot 5h + q \cdot 3a \cdot 1,5a + \\
 & = (224 - 6 \cdot 14,8(6) \cdot 2) / (4 \cdot 2) = 5,7 \text{ кН} . \\
 & H^A = (224 - 6V^A \cdot a) / (4 \cdot a) = \\
 & = 14,8(6) \text{ кН} . \\
 & \text{Балансиране при сечка на горната хоризонтална ребра} \\
 & \text{шарнир: } \\
 & V^A = 118,9(3) / (4 \cdot 2) = 14,8(6) \text{ кН} . \\
 & -4V^A \cdot a + 118,9(3) = 0 ; \\
 & \left. \begin{aligned} & 2V^A \cdot a + 4H^A \cdot h - 105,0(6) = 0 ; \\ & -6V^A \cdot a - 4H^A \cdot h + 224 = 0 , \end{aligned} \right\} \\
 & \text{коefficientи на квадратния уравнение: } \\
 & p_{max} \text{ при положение } -2 \text{ и коefficientи на квадратния уравнение: } \\
 & \text{коefficientи при положение } +2 \text{ и коefficientи на квадратния уравнение: } \\
 & H^A \text{ при положение } +2 \text{ и коefficientи на квадратния уравнение: } \\
 & H^B \text{ при положение } +2 \text{ и коefficientи на квадратния уравнение: } \\
 & H^E \text{ при положение } +2 \text{ и коefficientи на квадратния уравнение: }
 \end{aligned}$$

FIG. 2.7. A topographic profile across the major D 1 E 1

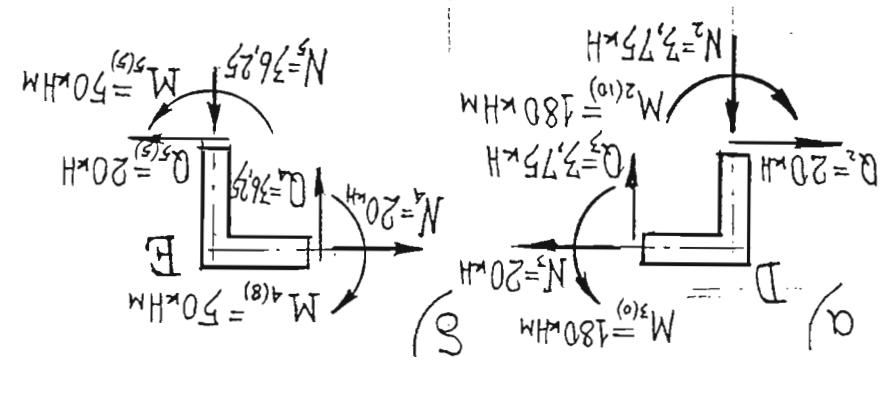
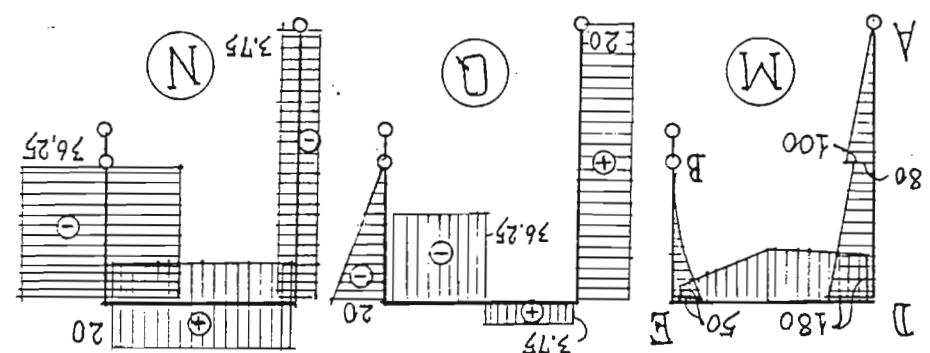


FIG. 2.6. Sample histogram showing N, \bar{N} , and N .



Убедившись в правильности определения опорных реакций в балке, переносим полученные реакции V_k и H_k на II-ю раму (см. рис. 4.3б), являющуюся по отношению к I-ой основной, и переходим к расчёту этой рамы.

Во II-ой трёхшарнирной раме следует обратить внимание на ненагруженную правую стойку КF, шарнирно соединённую в точке F с основанием с одной стороны, и с другой - шарниром K с ломаным стержнем EK. Такая ненагруженная стойка, фактически, выполняет роль шарнирно подвижной опоры, откуда следует, что горизонтальная составляющая опорной реакции $H_p = 0$. Таким образом расчёт такой трёхшарнирной рамы упрощается и сводится к расчёту ломаной балки.

$$\begin{aligned}\sum M_F &= V_E \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot 1,5a + H_K \cdot 2h = 0, \\ V_E &= (4,5q \cdot a^2 - 2H_K \cdot h) / (3 \cdot a) = (4,5 \cdot 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3,2 \cdot 2) / (3 \cdot 2) = \\ &= 9,8(6) \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_E &= -V_F \cdot 3a + 4,5q \cdot a^2 + V_k \cdot 3a + 2H_K \cdot h = 0, \\ V_F &= (4,5q \cdot a^2 + V_k \cdot 3a + 2H_K \cdot h) / (3a) = \\ &= (4,5 \cdot 4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3,2 \cdot 2) / (3 \cdot 2) = 30,1(3) \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверяем вертикальные составляющие опорных реакций V_E и V_F :

$$\begin{aligned}\sum Y &= V_F + V_E - q \cdot 3a - V_k = \\ &= 9,8(6) + 30,1(3) - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 16 = 0.\end{aligned}$$

Вычисляем значение горизонтальной составляющей реакции в опоре E:

$$\sum X = -H_F + H_K = 0; \quad H_F = H_K = 3,2 \text{ кН}.$$

Переходим к вычислению опорных реакций в основной трёхшарнирной раме III с опорами в разных уровнях (рис. 4.3в). Записываем два условия равновесия для определения V_A и H_A :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B = V_A \cdot 3a + H_A \cdot 2h + H_F \cdot 3h - V_F \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot 1,5a = 0, \\ \sum M_D = V_A \cdot 2a + H_A \cdot 4h - F_2 \cdot h + H_F \cdot h - V_F \cdot 2a - q \cdot 2a^2 = 0. \end{array} \right.$$

ния, по которым не проводились вычисления. Такая проверка обычно выполняется исходя из условия равновесия узлов рамы или отдельной её части.

Рассмотрим узел D, вырезав его из данной рамы и приложив все действующие на него внутренние и внешние усилия (см. рис. 2.7а) и составив три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_D &= M_{2(10)} - M_{3(0)} = 180 - 180 = 0; \\ \sum X &= -Q_2 + N_3 = -20 + 20 = 0; \\ \sum Y &= N_2 - Q_3 = 3,75 - 3,75 = 0.\end{aligned}$$

Все уравнения удовлетворяют условиям равновесия и, следовательно, узел D находится в равновесии.

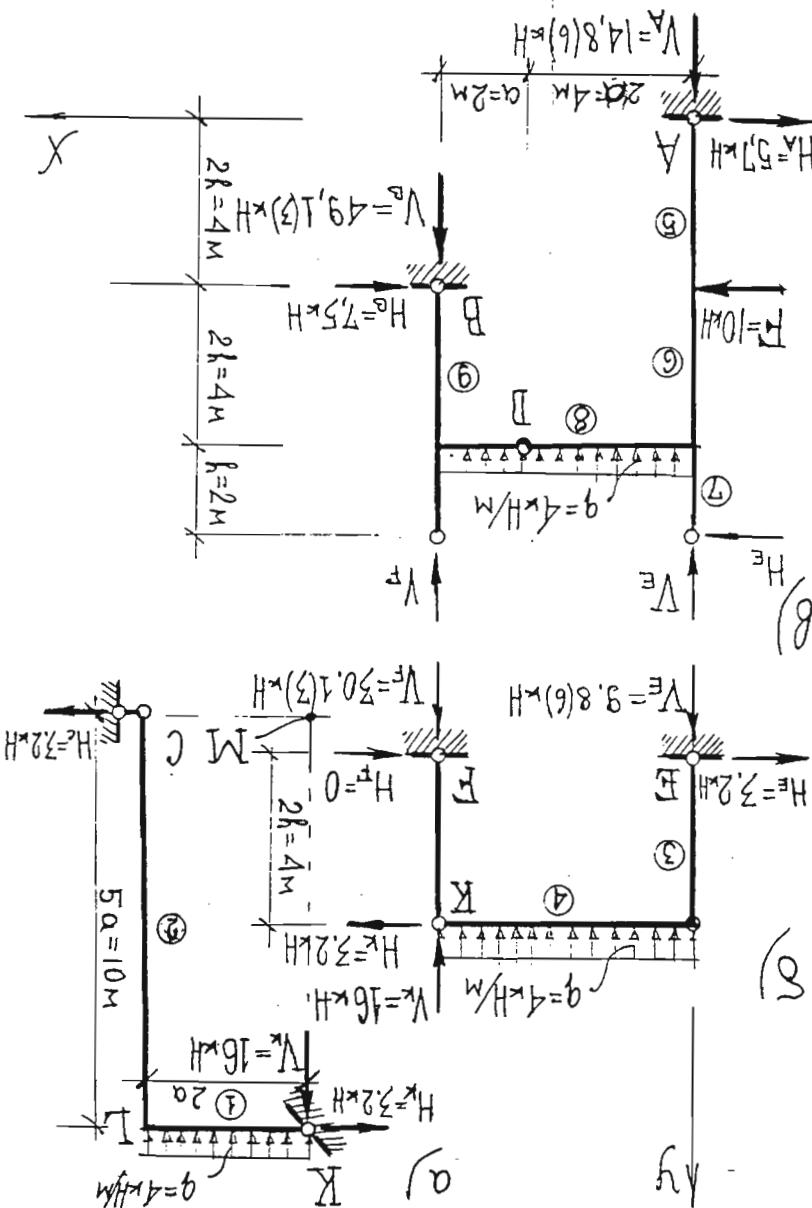
Составляем условия равновесия для узла E (рис. 2.7б):

$$\begin{aligned}\sum M_E &= M_{4(8)} - M_{5(5)} = 50 - 50 = 0; \\ \sum X &= -N_4 + Q_5(5) = -20 + 20 = 0; \\ \sum Y &= -Q_4 + N_5 = -36,25 + 36,25 = 0.\end{aligned}$$

В узле E так же выполняются все условия равновесия. Отсюда следует, что эпюры M , Q и N построены правильно.

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

3. PACKAGE TYPE IIIA PHOTAX PAM.



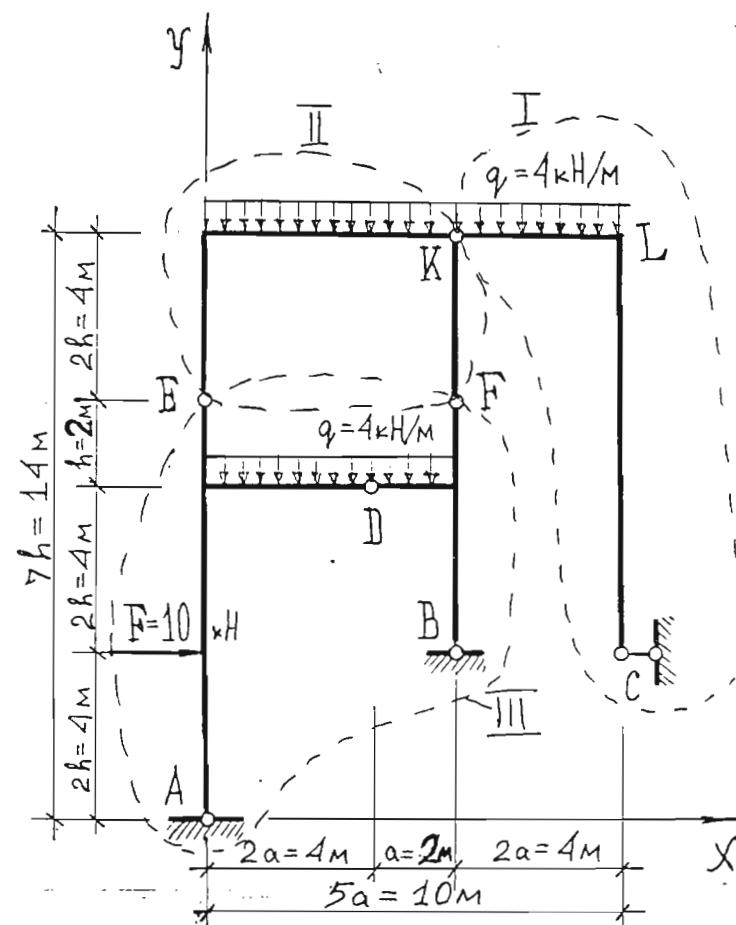


Рис.4.2. Статически определимая составная рама.

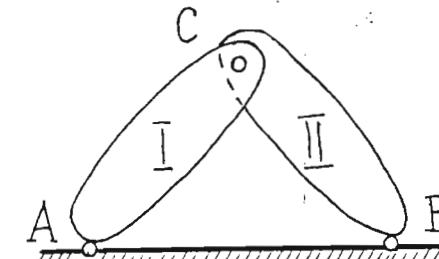


Рис.3.1. Трёхшарнирная система.

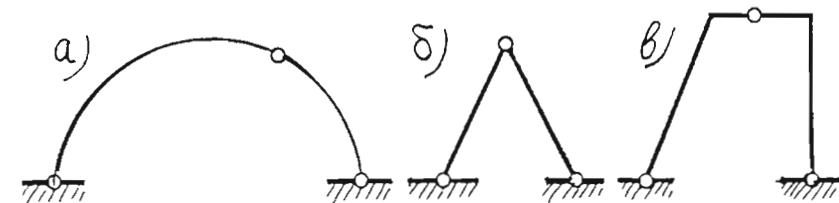


Рис.3.2. Виды трёхшарнирных систем:
а) трёхшарнирная арка;
б, в) трёхшарнирные рамы.

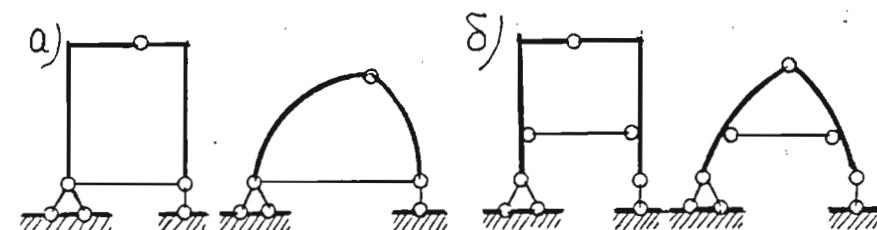


Рис.3.3. Рамы и арки с затяжками:
а) в уровне опор;
б) выше уровня опор.

способом. В этом случае рассматривается балка, на которую из эпюры M соответствующего участка переносятся граничные значения моментов M_A и M_B (см. рис. 4.1д). Неизвестные поперечные силы Q_A и Q_B , которые заданы положительными (см. рис. 2.2), находятся соответственно из условий равновесия:

$$\sum M_B = 0 \quad \text{и} \quad \sum M_A = 0,$$

$$\text{тогда } \sum M_B = Q_A \cdot l - q \frac{l^2}{2} + M_A - M_B = 0,$$

$$Q_A = q \frac{l}{2} + (M_B - M_A)/l;$$

и

$$\sum M_A = Q_B \cdot l + q \frac{l^2}{2} + M_A - M_B = 0,$$

$$Q_B = -q \frac{l}{2} + (M_B - M_A)/l.$$

В результате получены те же значения, что и в случае, представленном на рис. 4.1г. По полученным формулам можно определять значения поперечных сил, но при этом важно помнить, что значения моментов необходимо подставлять с учетом знаков (см. рис. 2.2).

Вычисление нормальных усилий в стержнях рамы и построение эпюры N производится по эпюре Q последовательным вырезанием узлов рамы и рассмотрения их равновесия. Определение неизвестных нормальных усилий следует начинать с узла, в котором не более двух стержней с неизвестными нормальными усилиями. К узлам прикладываются сосредоточенные внешние силы, действующие непосредственно на узел, и поперечные силы с учетом их знака, определяемого по эпюре Q , а также искомые неизвестные нормальные усилия положительного направления (растягивающие). Значения неизвестных определяются из условий равновесия узла:

$$\sum X = 0 \quad \text{и} \quad \sum Y = 0.$$

Правильность определения поперечных и нормальных усилий проверяется из условий равновесия для любой отсеченной части рамы.

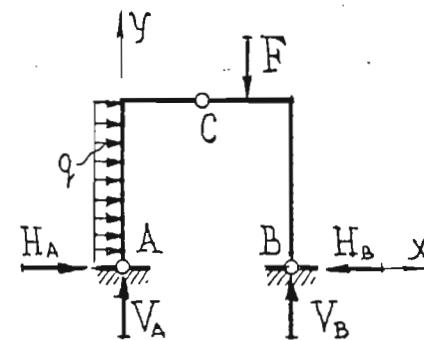


Рис. 3.4. Трёхшарнирная рама с опорами в одном уровне.

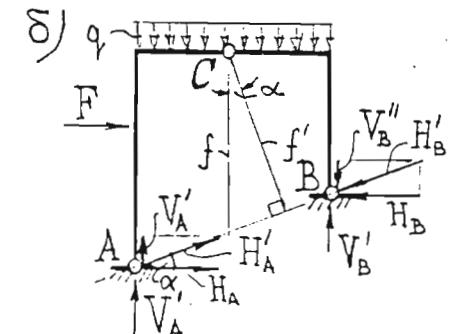
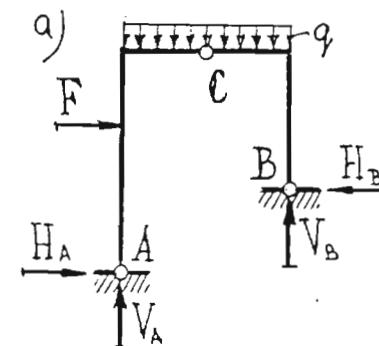


Рис. 3.5. Трёхшарнирная рама с опорами в разных уровнях.

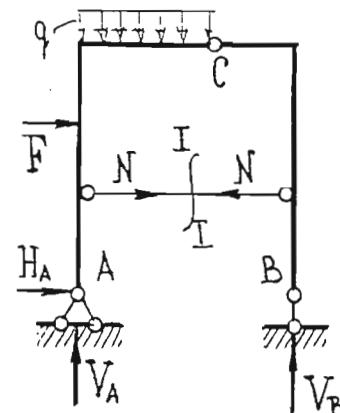
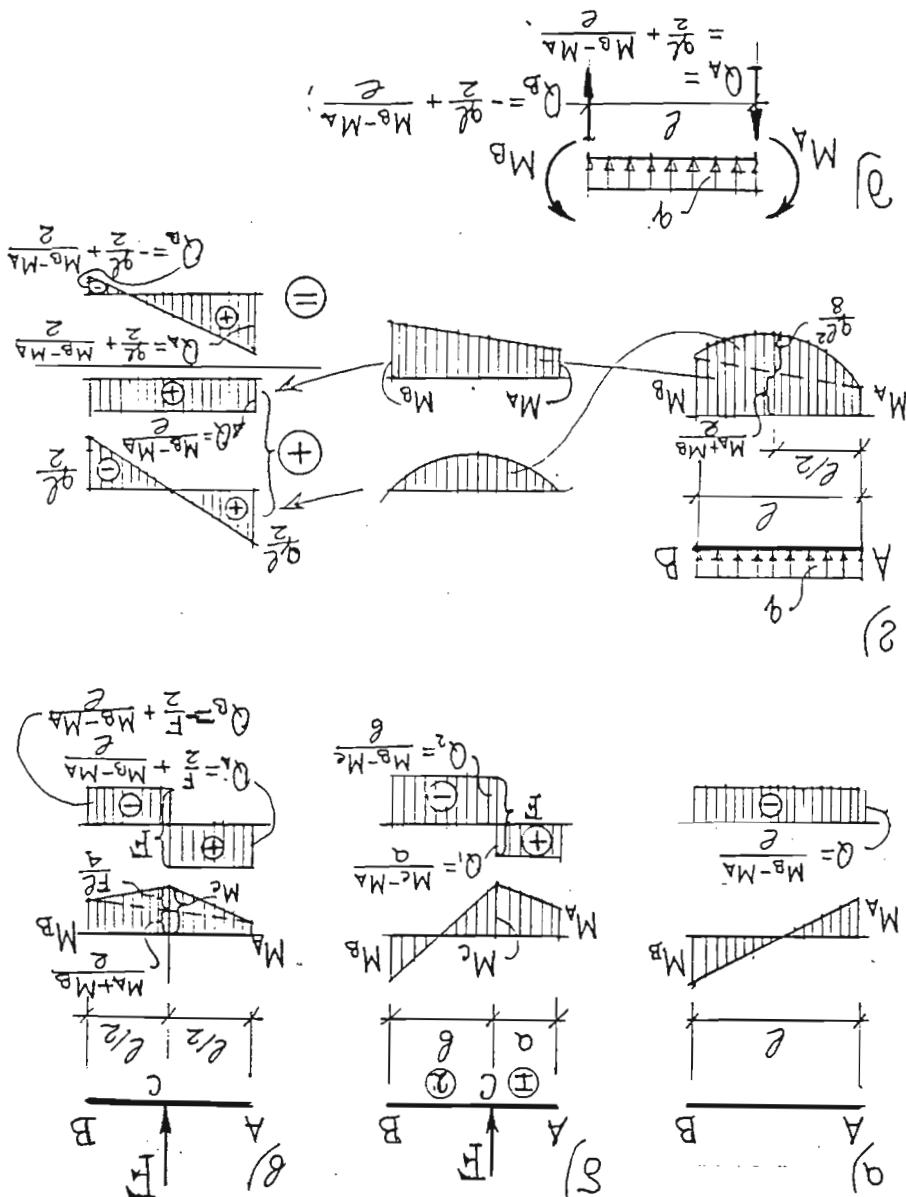


Рис. 3.6. Рама с затяжкой.

- 7) upn parhomepho pacudpejererhohon harpykse.
 upnokxehohon a hertpe yactra;
 b) a cuyrae cocpejotorehohon cunh;
 6) upn jectrenn cocpejotorehohon cunh;
 b) a cuyrae heharymekhoro yactra;
 samee nriidzamix momehro:

Fig. 4.1. Upnemehene shahenm nongepehnh cui no



M, G n N, kar n a upocrix pamx.

arkum a tpedxamphond pame nepeoxoxt k nectpoemns sany
 llocce upnemehene box coctaratamix updphrx pe-

parha hyra.
 ke pamh c startxom loqisohatapha coctaratamix gerkunn
 MVA n hanpahemn a upnemohoxhne etopohn. B cuyrae
 pndoshataphne coctaratamix ophphx cnotewax lo-
 kashon hemmen harpykar a tpedxamphond pame to-
 chayget homhny, tuo upn jectrenn tophko bepti-
 tpedxamphond cncrme.

TAKM odgazom hoyyateca, tuo upnemehene jcn-
 nia a startxom shahenm nongepehnh pachoga a orhahon
 kegahemn n samemhoyt hem3bechtan ychitne, kotoqee upn-

ura upnemehene jcnina a startxom ee paccekril
 upnemehene no ychitne:
 $\sum M_A = 0.$

$\sum F_y = 0.$
 upnemehene no ychitne:
 llopdereka beptinckaprhx coctaratamix ophphx pekrum

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0, \\ \sum M_A &= 0, \\ \sum M_B &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ns n3bechtan ychitne:
 tak kar ouha ns ophphond - hentobnkhra (fig. 3.6). Pekrum upnemehene
 noccatareh, no otjomennk k pekrumna arblatetca gashonon,
 pama c startxom, a karom qyophe oha he gira

$$\text{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{f^2 - (f')^2}}.$$

$$V_B = V'_B - V''_B = V'_B - H'_B, \sin \alpha = V'_A + H'_A \tan \alpha;$$

$$V'_A = V'_A + V''_A + H'_A \sin \alpha = V'_A + H'_A \tan \alpha;$$

исходя из того, что функция поперечных сил является первой производной функции моментов, т.е.

$$Q = \frac{d M}{d X} .$$

Определение поперечных сил на участках с различным характером эпюры изгибающих моментов показано на рис.4.1.

В случае ненагруженного участка (рис.4.1a) значение соответствующей поперечной силы вычисляется по известной формуле:

$$Q = \frac{M_{\text{пр(верх)}} - M_{\text{лев(нижн)}}}{\Delta \ell} .$$

Для случая, когда участок загружен сосредоточенной силой, как это показано на рис.4.1б, удобно рассматривать две зоны: до "излома" эпюры M и после "излома", и отдельно вычислять значения поперечных сил Q_1 и Q_2 в этих зонах. Часто встречаются участки с сосредоточенной силой F , приложенной в центре, тогда значения поперечных сил определяются по формулам, приведенным на рис.4.1в.

В случае определения поперечной силы на участке с внешней равномерно распределенной нагрузкой (рис.4.1г) следует эпюру M этого участка разложить на две эпюры: первая – эпюра параболического очертания с моментами по концам равными нулю; вторая – в общем случае трапециевидная. Первой эпюре (M ("параболе")) соответствует эпюра поперечных сил шарнирно опёртой балки с равномерно распределённой нагрузкой, со значениями поперечных сил на опорах равными $q\ell/2$ и $-q\ell/2$. Во второй эпюре (M) в форме трапеции в общем случае, вычисляется значение ΔQ (см. рис.4.1г). Затем обе, полученные эпюры, складываются и получают окончательную эпюру поперечных сил для рассматриваемого участка.

Для участка с равномерно распределённой нагрузкой можно вычислять значения поперечных сил и другим

3.1. ПРИМЕР РАСЧЁТА ТРЕХШАРНИРНОЙ РАМЫ.

Построить эпюры (M) , (Q) и (N) для трёхшарнирной рамы, изображенной на рис.3.7.

Решение. Выполним кинематический анализ. Данная рама состоит из двух дисков соединенных между собой шарниром С и каждый из дисков шарнирно прикреплён к земле. Эти три шарнира не лежат на одной прямой и, следовательно, данная рама является неизменяемой.

Так как опоры в данной трёхшарнирной раме находятся на разных уровнях, составляем две системы уравнений равновесия с двумя неизвестными, учитывая, что моменты, действующие по ходу часовой стрелки, будем считать положительными.

Первая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B = V_A \cdot \ell - H_A \cdot 0,5 \cdot h - q \cdot \ell^2 / 2 = 0; \\ \sum M_C = V_A \cdot a - H_A \cdot 1,5 \cdot h - F \cdot h - q \cdot a^2 / 2 = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Систему уравнений можно решать методом подстановки или методом исключения. Данную систему удобно решать методом исключения, для этого умножим обе части первого уравнения на коэффициент -3 , после чего, сложив оба уравнения, исключаем неизвестное H_A и получаем уравнение с одним неизвестным V_A .

$$\left\{ \begin{array}{l} + -3V_A \cdot \ell + 1,5 \cdot h \cdot H_A + 3 \cdot q \cdot \ell^2 / 2 = 0, \\ V_A \cdot a - 1,5 \cdot h \cdot H_A - F \cdot h - q \cdot a^2 / 2 = 0; \end{array} \right. \quad -V_A (3\ell - a) - F \cdot h + 0,5 \cdot q \cdot (3\ell^2 - a^2) = 0;$$

отсюда

$$\underline{V_A} = \frac{q(3\ell^2 - a^2)/2 - F \cdot h}{3\ell - a} = \frac{5(3 \cdot 6^2 - 4^2)/2 - 10 \cdot 6}{3 \cdot 6 - 4} \approx 12,14 \text{ кН.}$$

Подставив полученное значение V_A в любое из исходных уравнений системы, например в первое, получим:

$$\underline{H_A} = \frac{V_A \cdot \ell - q \cdot \ell^2 / 2}{h / 2} = \frac{12,14 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 / 2}{0,5 \cdot 6} \approx -5,72 \text{ кН}$$

4. PACHT GOC TABHIX PAM.
 GOC TABHIXMEN BYPOGVO CONCEM YPABEHNNI:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_A = -V_B \cdot C - H_B \cdot 0,5 h + F \cdot 0,5 h + q \cdot C/2 = 0, \\ \Sigma M_B = -V_B \cdot C + H_B \cdot 0,5 h + F \cdot 0,5 h + q \cdot C/2 = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

 HOGTABHIXMEN N3BECCHHE SHABEHNNI B CONCEM, NOJYHN:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2V_B + 6H_B + 10 = 0, \\ -6V_B - 3H_B + 120 = 0; \end{array} \right.$$

 YMHOKSEM N3BECCHHE YPABEHNNI HA KOGAFLINNIEHT 2 N KRAJAH-

$$\left\{ \begin{array}{l} -2V_B + 6H_B + 10 = 0. \\ -12V_B - 6H_B + 240 = 0; \end{array} \right.$$

 BASEM CO BYPOGM, NCKRUDZAN HEN3BECCHHE H_B :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2V_B + 6H_B + 10 = 0, \\ -12V_B - 6H_B + 240 = 0; \end{array} \right.$$

 OTRYAIA

$$V_B = \frac{14}{250} = 17,86 \text{ KHz.}$$

 HEN3BECCHHE H_B HAKOJUN N3 BYPOGM YPABEHNNI:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2V_B - 10 = \frac{6}{2 \cdot 17,86 - 10} = 4,28 \text{ KHz.} \\ H_B = \frac{6}{6} = 4,28 \text{ KHz.} \end{array} \right.$$

 JDEJLIMNC, KTO ODOGRHE PEAKTUN HAKHTEH REPDHO,

$$\Sigma X = -H_A - H_B + F = -5,72 - 4,28 + 10 = 0;$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - q = 12,14 + 17,86 - 5,6 = 0.$$

 KAKA TOLK I, $0 \leq Y \leq 3$ (pic. 3.8a).
 HOGTABHIXMEN K OUPPEMENHE BHVTIPERHHX YCJNHN

$$M, A \in N. \text{ JAKA STOLE KAK N B UPEMHNWEM DPNMMEPE}$$

$$M, A \in N. \text{ JAKA STOLE KAK N B UPEMHNWEM DPNMMEPE}$$

$$\Sigma M_0 = -M_1 + H_A \cdot Y = 0, \quad M_1 = H_A \cdot Y;$$

$$\Sigma M = 3, \quad M(3) = 17,16 \text{ KM.}$$

 UPN $Y = 0, \quad M(0) = 0;$

$$\Sigma M = -M_1 + H_A \cdot Y = 0, \quad M_1 = H_A \cdot Y;$$

$$Y = 3, \quad M(3) = 17,16 \text{ KM.}$$

 HETHPDE YPACTKA.

Участок IV, $0 \leq y \leq 6$ (рис. 3.8г).

$$\sum M_E = -M_4 + H_B y_1 = 0, \quad M_4 = H_B y_1;$$

при $y_1 = 0, \quad M_{4(0)} = 0;$

при $y_1 = 6, \quad M_{4(6)} = 4,28 \cdot 6 = 25,68 \text{ кНм}.$

$$\sum X = Q_4 - H_B = 0, \quad Q_4 = H_B = 4,28 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = N_4 + V_B = 0, \quad N_4 = -V_B = -17,86 \text{ кН.}$$

По полученным значениям внутренних усилий строим эпюры (M) , (Q) и (N) , представленные на рис. 3.9.

После построения эпюр выполняем проверку равновесия узлов трёхшарнирной рамы.

Рассмотрим узел Е.

$$\sum M_E = M_3(0) - M_2(9) = 8,52 - 8,52 = 0;$$

$$\sum X = Q_2 - N_3 = 4,28 - 4,28 = 0;$$

$$\sum Y = N_2 - Q_3(0) = 12,14 - 12,14 = 0.$$

Узел К.

$$\sum M_K = M_A(6) - M_3(6) = 25,68 - 25,68 = 0;$$

$$\sum X = N_3 - Q_4 = 4,28 - 4,28 = 0;$$

$$\sum Y = N_4 - Q_3(6) = 17,86 - 17,86 = 0.$$

Все условия равновесия для узлов Е и К выполняются, что подтверждает правильность построенных эпюр внутренних усилий (M) , (Q) и (N) .

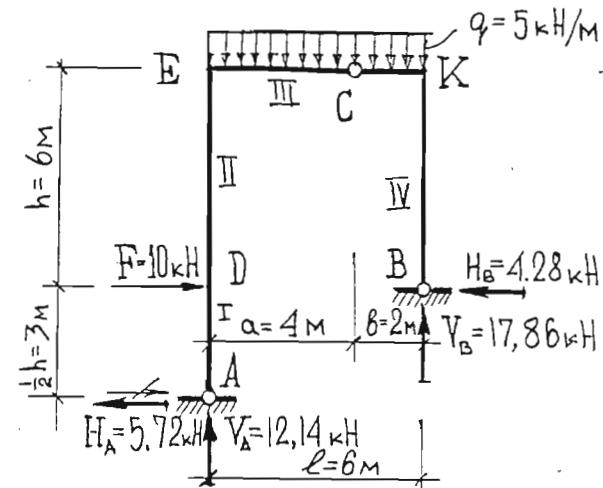


Рис. 3.7. Трёхшарнирная рама с опорами в разных уровнях.

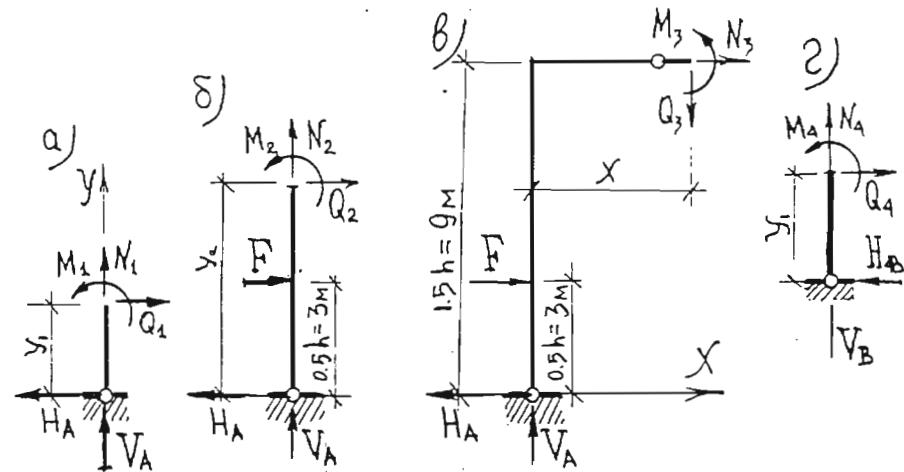
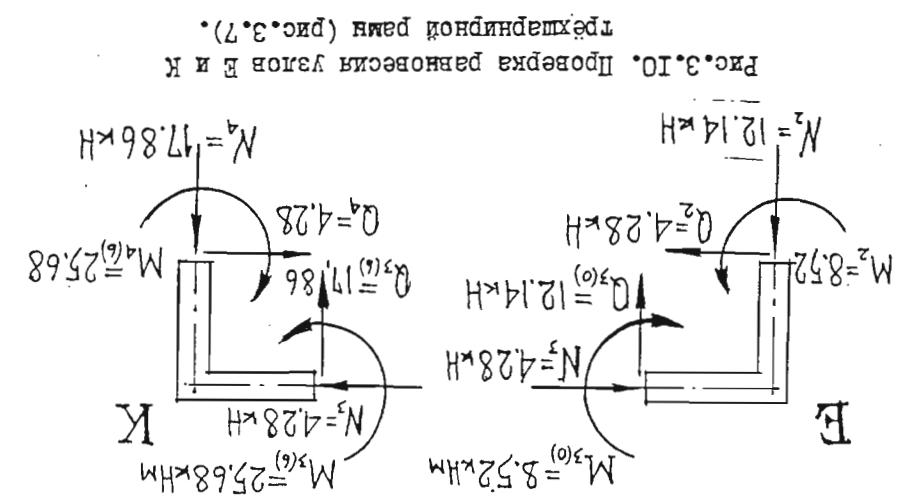
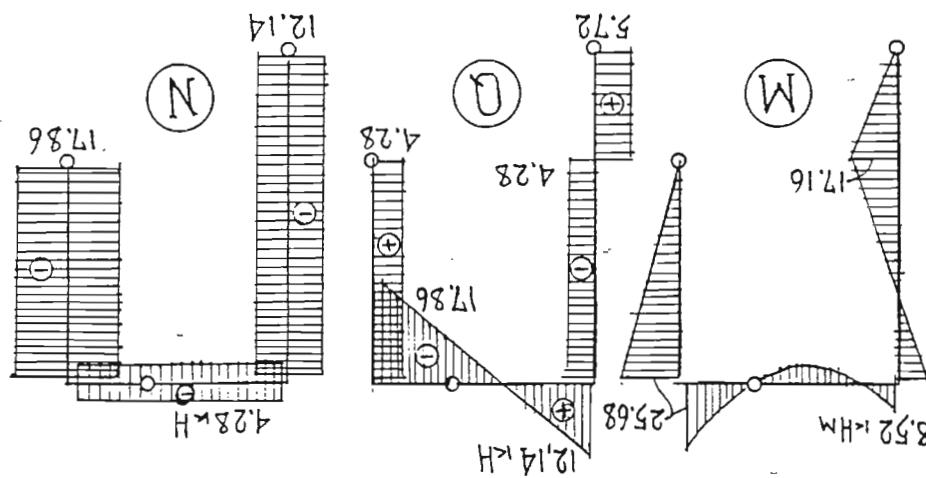


Рис. 3.8. К определению внутренних усилий M , Q и N для рамы рис. 3.7.



PNC.3.9. 3n0gpa Brytpehnx ycnnti M, a n N.



поберка парообесця якожа є в К

$$\begin{aligned}
 & \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{N}}^2 + \underline{\underline{V}}^A, \quad \underline{\underline{N}}^2 = -\underline{\underline{V}}^A = -12,14 \text{ kHz.} \\
 & \underline{\underline{Z}}_Y = \underline{\underline{Q}}^2 - \underline{\underline{H}}^A + \underline{\underline{F}} = 0, \quad \underline{\underline{Q}}^2 = \underline{\underline{H}}^A - \underline{\underline{F}} = \\
 & = 5,72 - 10 = -4,28 \text{ kHz.} \\
 & \underline{\underline{Z}}_X = \underline{\underline{Q}}^2 - \underline{\underline{H}}^A + \underline{\underline{F}} = 0, \quad \underline{\underline{Q}}^2 = \underline{\underline{H}}^A - \underline{\underline{F}} = \\
 & = 5,72 - 10(9 - 3) = -8,52 \text{ kHz.} \\
 & \text{UPnP } y = 9, \quad M^{(9)} = 5,72 \cdot 9 - 10(9 - 3) = 17,16 \text{ kHz;} \\
 & \text{UPnP } y = 3, \quad M^{(3)} = M^{(3)} = 17,16 \text{ kHz;} \\
 & M^{(2)} = H^A y - F(y - 3); \\
 & \underline{\underline{M}}^{(2)} = -\underline{\underline{M}}^2 + H^A y - F(y - 3) = 0; \\
 & \text{Yacuteack II, } 3 \leq y \leq 9 \text{ (png.3.86).}
 \end{aligned}$$