

Министерство Образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ
(Государственная Академия)

Кафедра высшей математики и строительной механики

Кабанова О.А.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по курсу «Высшая математика»
раздел «**Линейная алгебра**»

**Вычисление определителя
Нахождение обратной матрицы**

Москва – 2015 год

От автора.

Данное методическое пособие предназначено для студентов 1-го курса всех специальностей как дополнение к читаемому курсу «Высшая математика».

Это пособие особенно будет полезно для студентов, не успевающих усвоить материал сразу на лекции, т.к. в нем, наряду с необходимыми теоретическими вставками, подробно разбираются различные способы вычисления определителей и нахождения обратной матрицы.

1. Определители

1.1. Понятие определителя.

Определитель – это число, которое является характеристикой данной квадратной матрицы. Определители существуют только для квадратных матриц.

Чтобы подчеркнуть связь между квадратной матрицей и ее определителем, его обозначают также как и матрицу, к которой он относится, только меняют форму скобок. Если в матрице элементы ограничены двумя круглыми скобками, то, выправив скобки до прямых вертикальных линий, мы получим определитель. При этом элементы матрицы автоматически становятся элементами определителя, который кратко обозначается одним из символов Δ , $|A_n|$, $\det A$.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Несмотря на то, что внешне квадратная матрица и ее определитель отличаются только формой скобок, между ними есть принципиальное отличие. **Матрица – это таблица чисел, а ее определитель – это одно число, которое характеризует эту квадратную матрицу.**

Определитель 1-го порядка – это определитель квадратной матрицы 1-го порядка A_1 , который равен значению элемента a_{11} , так как матрица A_1 состоит из одного этого элемента, который одновременно является ее числовой характеристикой: $\Delta = |A_1| = a_{11}$.

Определитель 2-го порядка – это определитель квадратной матрицы 2-го порядка A_2 , который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \quad (1.1)$$

то есть он **равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей** (рис.1.1).

Рисунок 1.1

Пример 1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22$

Определитель 3-го порядка – это определитель квадратной матрицы 3-го порядка A_3 , который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \quad (1.2)$$

Для запоминания формулы (1.2) используют правило треугольников, которое символически изображено на рисунке 1.2.

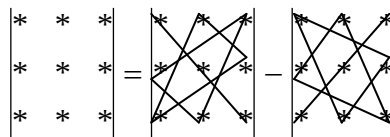


Рисунок 1.2

Со знаком (+) берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком (–) берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Пример 2: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-6) + 4 \cdot (-3) \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \cdot 0 - 4 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-6) \cdot (-3) \cdot (-1)$

=

= - 60 - 12 + 0 - 140 - 0 + 18 = - 194

Для нахождения определителей более высоких порядков необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения матричного элемента.

Определение. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается из исходного определителя вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} .

Например, пусть дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Чтобы найти минор элемента a_{11} (обозначается M_{11}) нужно из данного определителя удалить первую строку и второй столбец.

Вычеркиваем: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Получаем, что $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

Вычеркиванием второй строки и первого столбца находим минор элемента a_{21} :

$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минор элемента a_{31} будет выглядеть так: $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Определение. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij} , взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

В показателе складываются номер строки и номер столбца, на пересечении которых стоит матричный элемент.

Например, если дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

то $A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, ...,

$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

1.2. Свойства определителей.

1) При транспонировании определителя его значение не меняется, (то есть значение определителя не меняется при замене его строк столбцами с теми же номерами).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Следовательно, строки и столбцы определителя равноправны, поэтому его свойства можно формулировать и доказывать либо для строк, либо для столбцов.

2) При взаимной перестановке любых двух строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный.

Доказательство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -(a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3) Определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

4) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{12} \cdot a_{21} = \lambda (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5) Величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца) определителя, умноженные на одно и то же число.

Приступая к вычислению определителя необходимо сравнить строки (столбцы) друг с другом на наличие пропорциональных. Если таковые имеются, то смело можно писать 0.

Пример 3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Сравнив столбцы между собой, заметим, что соответствующие (стоящие на одинаковых позициях) элементы 1го и 3го столбцов пропорциональны. По свойству 3) данный определитель равен 0.

1.3. Вычисление определителя методом разложения по ряду.

Теорема Лапласа (точнее, частный случай теоремы Лапласа) гласит, что всякий **определитель равен сумме попарных произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения**, то есть

$$\Delta = |A_n| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad (1.3)$$

где $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по i-ой строке, а $\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по j-му столбцу.

На примере определителя 3го порядка это выглядит так:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \mathbf{a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}} \text{ (разложение по первой строке) или} \\ &= \mathbf{a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}} \text{ (разложение по третьему столбцу) = ...} \end{aligned}$$

Понятно, что, если выбирать ряд в котором есть нули, то слагаемых в разложении будет меньше.

Вычислим определитель из **примера 2** этим способом, разложив его по ряду, где есть нули, например по второй строке.

$$\begin{aligned} \text{Пример 4.} \quad \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 0 = \\ &= 3 \cdot (-1 \cdot (-6) - 1 \cdot 4) + 5 \cdot (-12 - 28) = 6 - 200 = -194 \end{aligned}$$

Если определитель $\Delta \neq 0$ то по свойству 5) в нем всегда можно «обнулить» любую строку (любой столбец) **до единственного ненулевого элемента** и разложить определитель по этой строке (столбцу). Применяя эту операцию нужное число раз, всегда можно из определителя n-го порядка получить определитель 2-го порядка.

Начиная выбирать ряд, в котором будет делаться максимальное количество нулей, рациональнее сначала поискать строки (столбцы) с пропорциональными соответствующими элементами. При их наличии нули делаются достаточно быстро.

Пример 5. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [Сравнив строки (столбцы), заметим пропорциональные элементы в 1ом и 2ом столбцах. (Если бы все элементы были пропорциональны, определитель был бы равен 0). Умножив 1ый столбец на -2, прибавим ко 2му. При этом изменяется только тот ряд, к которому прибавляем] =

$\times (-2)$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ [Разложим определитель по 2му столбцу] } =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \text{ [Разложим определитель по ряду с 0, например}$$

по 3му столбцу] = $-2 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$ [Перед обоими определителями получаются плюсы благодаря четным степеням] =

$$= -2 \cdot ((-4 - 3) + 0 + 3 \cdot (1 - 6)) = -2 \cdot (-22) = 44$$

В случае отсутствия пропорциональных элементов сделать максимальное количество нулей в ряду можно с помощью элемента, равного ± 1 (если его нет, его всегда можно сделать с помощью свойства 5)).

Заметим, что в этом случае, делая нули в строке, мы оперируем со столбцами, а, обнуляя до единственного $\neq 0$ элемента столбец, оперируем со строками. Покажем это на примере.

Пример 6. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ [Сделаем -1 на месте элемента -3 во второй строке.

Для этого по свойству 5 просто прибавим 1ую строку ко второй] =

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3+2 & 2+4 & 3-6 & 4+5 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 9 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \text{ [Теперь по свойству 5) делаем нули}$$

$\times 6$
 $\times (-3)$
 $\times 9$

во второй строке (оперируем со столбцами). Для этого умножаем 1ый столбец (в нем находится наша -1) на 6 и прибавляем ко 2му, затем умножаем на -3 и прибавляем к 3му, затем на 9 и прибавляем к 4му столбцу] =

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4+12 & -6-6 & 5+18 \\ -1 & 6-6 & -3+3 & 9-9 \\ -4 & 5-24 & 8+12 & 2-36 \\ 3 & 4+18 & 2-9 & -3+27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & -12 & 23 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -19 & 20 & -34 \\ 3 & 22 & -7 & 24 \end{vmatrix} \quad [\text{Раскладываем определитель}$$

$$\text{по 2ой строке}] = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 16 & -12 & 23 \\ -19 & 20 & -34 \\ 22 & -7 & 24 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \quad [\text{Теперь попытаемся}$$

найти одинаковый множитель у элементов строк или столбцов. Такого к сожалению здесь нет. Поэтому просто раскладываем определитель, например по 1ой строке.]

$$= 1 \cdot (16 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 20 & -34 \\ -7 & 24 \end{vmatrix} - 12 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -19 & -34 \\ 22 & 24 \end{vmatrix} + 23 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -19 & 20 \\ 22 & -7 \end{vmatrix}) =$$

$$= 1 \cdot (16 \cdot (20 \cdot 24 - (-7) \cdot (-34)) + 12 \cdot ((-19) \cdot 24 - 22 \cdot (-34)) + 23 \cdot ((-19) \cdot (-7) - 22 \cdot 20)) =$$

$$= 16 \cdot (480 - 238) + 12 \cdot (-456 + 748) + 23 \cdot (133 - 440) = 3872 + 3504 - 7061 = 315$$

Вычислим тот же определитель, сделав 1 в другом месте.

Пример 7. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$ [Сделаем 1 в 4ой строке вместо 3. Для

этого 1ую строку умножим на -1 и прибавим к 4ой] =

= [Получили намного удобнее числа, чем в предыдущем решении. Продолжим делать нули в той строке, где один нуль уже получился. Для этого сначала просто прибавим 3ий столбец к 4му. А потом умножим 1ый столбец на 8 и прибавим к 3му.]

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow + \\ \uparrow \times(-8) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -22 & -1 \\ -3 & 2 & 27 & 7 \\ -4 & 5 & 40 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [\text{Разложим определитель}$$

$$\text{по 4ой строке]} = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 5 & 40 & 10 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \quad [\text{Заметим, что пятая строка}$$

содержит одинаковый множитель. Вынеся его за знак определителя по свойству 4, существенно упростим вычисления] =

$$= (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \quad [\text{Хотя определитель 3го порядка не сложно разложить по}$$

ряду и без нулей, сделаем нули в третьей строке с помощью 1. Для этого 1ый столбец умножим на -8 и прибавим ко 2му, затем на -2 и прибавим к 4му] =

$$= (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22 & -1 \\ 2 & 27 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -22-32 & -1-8 \\ 2 & 27-16 & 7-4 \\ 1 & 8-8 & 2-2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -54 & -9 \\ 2 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \times(-8) \\ \uparrow \\ \times(-2) \end{matrix}$

$$= -5 \cdot (1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -54 & -9 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0) = -5 \cdot (-162 + 99) = 315$$

1.4. Вычисление определителя методом приведения к треугольному виду.

Определитель треугольного вида равен произведению его диагональных элементов, то есть, если по одну сторону от главной диагонали матрицы стоят нули, то ее определитель можно вычислить следующим образом:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Пример 8 . Вычислить определитель сведением его к треугольному виду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Чтобы свести определитель к треугольному виду, необходимо в 1ом столбце обнулить три элемента, во 2ом – два, в 3ем – один. Получится ступенчатый треугольный вид, в котором под каждой «ступенькой» будут стоять нули. Начнем обнуление с 1го столбца.

Для этой цели выберем в качестве активной 2-ую строку, у которой 1-ый элемент равен 1, а остальные элементы **минимальны по модулю** по сравнению с элементами 1ой и 4ой строк. Для удобства поставим ее на первое место (при этом знак

определителя по свойству 2 поменяется) и для ясности выделим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & \end{vmatrix} \times (-1) \dots \times (-3) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Делаем нули под 1ой} \\ \text{ступенькой, т.е. в 1ом столбце под } 1 \end{array} \right]$$

ступенькой, т.е. в 1ом столбце под **1** с помощью первой строки. Для этого умножаем ее на -1 и прибавляем ко 2ой строке и к 4ой. Затем умножаем ее на -3 и прибавляем ко 2ой

$$\text{строке}] = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Чтобы сделать нули под 2ой ступенькой поменяем} \\ \text{2ую и 3ю строки местами, для того чтобы на 2ой ступеньке стояла } -1. \text{ При этом знак} \\ \text{определителя опять поменяется.} \end{array} \right] =$$

2ую и 3ю строки местами, для того чтобы на 2ой ступеньке стояла -1. При этом знак определителя опять поменяется.] =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \times 2 \times (-1) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Нули под 2ой ступенькой делаем с помощью 2ой} \\ \text{строки, не трогая уже 1ую строку. Не будем выносить множитель 2 из 3ей строки, т.к.} \\ \text{один из нулей удобно сделать, умножив 2ую строку на } -1 \text{ и прибавив к 3ей (числа} \\ \text{получатся меньше). Затем умножаем 2ую строку на 2 и прибавляем к 3ей строке.} \end{array} \right] =$$

строки, не трогая уже 1ую строку. Не будем выносить множитель 2 из 3ей строки, т.к. один из нулей удобно сделать, умножив 2ую строку на -1 и прибавив к 3ей (числа получатся меньше). Затем умножаем 2ую строку на 2 и прибавляем к 3ей строке.] =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Заметим, что из 4ой строки можно вынести множитель} \end{array} \right] =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Поменяем местами 3ю и 4ую строки. Знак опять изменится} \end{array} \right] =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \end{vmatrix} \times 6 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Делаем нуль под 3ей ступенькой, умножая 3ю строку} \end{array} \right]$$

$$\text{на 6 и прибавляя к 4ой строке]} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 8 = -24$$

2. Обратная матрица

2.1. Понятие обратной матрицы

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель $|A|=0$, и **невырожденной**, если ее определитель $|A| \neq 0$.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A , если выполняется условие:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \quad (2.1)$$

Заметим, что обратная матрица A^{-1} возможна только для невырожденной матрицы A .

Если в матрице A поменять местами строки на столбцы с сохранением их нумерации, то получится матрица A^T , которая называется **транспонированной** матрицей для матрицы A .

Матрица $\tilde{A}$ называется **союзной** к квадратной матрице A , если она состоит из алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы A^T . Чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$, следует транспонировать матрицу A , а затем все ее элементы заменить их алгебраическими дополнениями, то есть

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Для любой невырожденной квадратной матрицы A существует **единственная обратная матрица** A^{-1} , которая находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} \quad (2.3)$$

Эта формула позволяет находить обратную матрицу **с помощью союзной матрицы** и в развернутом виде выглядит так:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы:

- 1) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;
- 2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

2.2. Вычисление обратной матрицы A^{-1} с помощью союзной матрицы $\tilde{A}$.

Для этого необходимо:

- 1) Вычислить определитель $|A|$. Если $|A|=0$, следовательно матрица A – вырожденная и для нее нет обратной матрицы A^{-1} . Если же $|A| \neq 0$, то продолжаем дальше.
- 2) Вычислить алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A и построить матрицу A_A , в которой на местах элементов a_{ij} будут стоять их алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- 3) Транспонировать матрицу A_A , чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = A_A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

- 4) Вычислить обратную матрицу A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$

- 5) Выполнить проверку: $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример 9. Найти обратную матрицу для данной $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) Вычислим определитель $|A|$.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot (6 - 10) + (-3 - 20) = 8 - 23 = -15 \end{aligned}$$

- 2) Найдем алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -23;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

3) Составим матрицу A_A из алгебраических дополнений A_{ij} и транспонируем ее, чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$A_A = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -23 \\ 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = A_A^T = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ -23 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

4) Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ -23 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{23}{15} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

В случае, когда $|A| \neq \pm 1$, множитель $\frac{1}{|A|}$ лучше оставлять вне обратной матрицы A^{-1} для удобства проверки.

5) Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ -23 & 10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{23}{15} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

2.3. Вычисление обратной матрицы A^{-1} методом элементарных преобразований над строками матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

- 1) перестановка строк (столбцов) матрицы;
- 2) умножение элементов строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$;
- 3) прибавление элементов одной строки (столбца) к соответствующим элементам другой

строки (столбца);

4) вычеркивание нулевой строки (столбца) матрицы.

Матрицы A и B называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если одна из них получается из другой в результате элементарных преобразований.

Суть метода элементарных преобразований над *строками* матрицы заключается в следующем. К исходной квадратной матрице A_n справа через разделительную вертикальную черту приписывают единичную матрицу E того же порядка, что и A , и таким образом получают расширенную матрицу $(A|E)$. Далее, с помощью элементарных преобразований над *строками* приводят матрицу $(A|E)$ сначала к ступенчатому виду $(A_1|B)$, где A_1 – верхняя треугольная матрица, а затем к виду $(E|A^{-1})$. Таким образом, имеет место преобразование: $(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1})$.

Пример 10. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований над *строками*.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (A|E) &= \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \times (-1) \dots \times (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \\ &\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \times (-1) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \times (-2) \dots \times 3 \end{array} \sim \end{aligned}$$

[Теперь с помощью третьей строки делаем нули над последней ступенью в 3ем столбце]

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \times (-\frac{1}{3}) \\ \times (-\frac{1}{3}) \\ \times (-1) \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Умножаем 2ую строку на } (-\frac{1}{3}), \text{ а 3ю на } (-1), \\ \text{используя элементарное преобразование 2]} \end{array} \right]$$

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times (-5) \end{array} \sim$$

[Последний нуль вместо 5 в начале второго столбца делаем только с помощью второй строки, чтобы не испортить другие числа, умножая ее на -5 и прибавляя к 1ой строке]

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Проверка: } A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Основная литература.

- 1) Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть I. – М.: Айрис – Пресс, 2009.
- 2) Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-Пресс, 2008.
- 3) Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969
- 4) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –Ижевск: РХД, 2000.
- 5) Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ, Астрель, 2006

Дополнительная литература

Михеев В.И., Павлюченко Ю.В. Высшая математика: Краткий курс. – М.: РУДН, 2008.