

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ
(государственная академия)

Кафедра
"Высшая математика и строительная механика"

Статически неопределимые рамы

Методическое пособие.
Пример расчета
статически неопределимой рамы
методом сил.

Для студентов всех специальностей.

Москва

2015

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ
(государственная академия)

Кафедра
"Высшая математика и строительная механика"

В.А.Дибров

Статически неопределимые рамы

Методическое пособие.
Пример расчета
статически неопределимой рамы
методом сил.

Для студентов всех специальностей.

Москва

2015

УДК 624.04

УДК 51-3

УДК 519.254

УДК 519.6 ББК В162я73

Содержание

	Стр.
Часть 1. Расчет статически неопределимой рамы методом сил	4
Введение	4
1. Некоторые сведения из теории перемещений	4
2. Метода сил	5
3. Пример расчета статически неопределимой рамы методом сил	6
3.1. Степень статической неопределимости рамы	6
3.2. Выбор основной системы метода сил	7
3.3. Канонические уравнения метода сил	7
3.4. Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах	8
3.5. Решение системы канонических уравнений	11
3.6. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов	12
3.7. Статическая и деформационная проверка окончательной эпюры моментов	13
3.8. Определение линейного и углового перемещений узла «К»	13
3.9. Построение эпюры поперечных сил «Q»	15
3.10. Построение эпюры продольных сил «N»	17
3.11. Определение экстремальных нормальных напряжений в опасных сечениях рамы и проверка выполнения условий прочности	19
Литература	20

Часть 1. Расчёт статически неопределимой рамы методом сил

Введение

Несущие конструкции зданий часто выполняются в виде стальных или железобетонных каркасов (рам). Рамой обычно называют геометрически неизменяемую систему, состоящую из элементов, работающих на изгиб и растяжение-сжатие, жёстко соединённых в узлах. Допускаются и шарнирные соединения, если они не нарушают условий геометрической неизменяемости рамы.

При проектировании и расчёте конструкций зданий и сооружений необходимо определить размеры поперечных сечений элементов рамы. Для этого раму рассчитывают на воздействие внешних нагрузок и определяют внутренние силовые факторы (внутренние усилия) – изгибающие моменты (M), поперечные (Q) и продольные силы (N), действующие в сечениях рамы. Нахождение внутренних усилий в элементах статически определимых систем производится методом сечений с помощью условий равновесия. Для решения задачи об определении внутренних сил в элементах статически неопределимой системы необходимо применять специальные методы. Наиболее наглядными и методически полезными является метод сил, смысл которого заключается в ведении дополнительных условий – уравнений совместности деформаций (перемещений), из которых и находят неизвестный внутренние силовые факторы.

1. Некоторые сведения из теории перемещений.

Основой метода расчёта любой статически неопределимой системы, в данном случае, рамы служит теория перемещений. При помощи этой теории возможно определять любое перемещение от воздействия активной нагрузки, изменения температуры, смещения опорных закреплений в разных типах моделей сооружений.

Важнейшими элементами теории перемещений являются теорема Максвелла о взаимности перемещений, теорема Бэтти о взаимности работ и универсальная формула для определения перемещений Максвелла-Мора. Применение формулы Максвелла-Мора связано с вычислением значения определённого интеграла, которое может быть выполнено как путём непосредственного интегрирования, так и приближенно при помощи формул Симпсона, трапеций и Верещагина. Эти формулы подсчёта значения определённого интеграла связаны с сопряжением или «перемножением» эпюр внутренних усилий определённого вида. Чтобы правильно применять способы Симпсона, трапеций и Верещагина нужно иметь достаточные навыки построения элементарных эпюр и помнить об ограничениях при

применении этих формул в зависимости от вида графика эпюр.

2. Метод сил.

В методе сил содержатся важные понятия и сведения, необходимые для усвоения последующих разделов курса. Необходимо усвоить физический смысл канонических уравнений. Важным вопросом является выбор основной системы метода. Она должна быть геометрически неизменяемой и статически определимой. При оценке геометрической неизменяемости основной системы нужно не только проверить аналитически число степеней свободы (по формуле Чебышёва, например), но также сделать геометрический анализ образования этой системы.

Удачный выбор основной системы обеспечивает наиболее простой расчёт и наименьший объем вычислений. В общем случае основная система должна выбираться так, чтобы единичные и грузовая эпюры распространялись на возможно меньшее число элементов. Если заданная система обладает симметрией, то основная система должна выбираться симметричной.

Применение различных способов упрощений при расчёте рам, прежде всего симметричных, приводит к значительному сокращению объема вычислительных работ. Необходимо усвоить приёмы упрощения: группировку неизвестных, разложение нагрузки на симметричную и обратно симметричную или кососимметричную.

Изучая порядок расчёта статически неопределимых рам, следует обратить внимание на проверку правильности построения эпюр внутренних усилий M , Q и N . Своевременный контроль освобождает от повторения утомительных расчётов.

Определение линейных и угловых перемещений сечений в статически неопределимой системе производится также, как в статически определимой, а именно методом Максвелла-Мора, то есть окончательная эпюра моментов от заданной нагрузки “перемножается” на эпюру моментов от единичного воздействия (единичной силы или единичного момента), приложенного к сечению в основной системе по направлению искомого перемещения (линейного или углового).

3. Пример расчёта статически неопределимой рамы методом сил.

В статически неопределимой раме (рис 1.) построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных сил Q и продольных сил N используя метод сил.

Найти горизонтальное перемещение (Δ_K) и угол поворота (ϕ_K) узла K .

3.1. Степень статической неопределимости равна

$$n=3k-\text{Ш0},$$

где k - число контуров (контур - область ограниченная сооружением и основанием; степень статической неопределимости каждого контура равна 3). $k=1$.

Ш0 – количество простых шарниров (соединяющих два стержня). Ш0=1.

$$n=3-1=2.$$

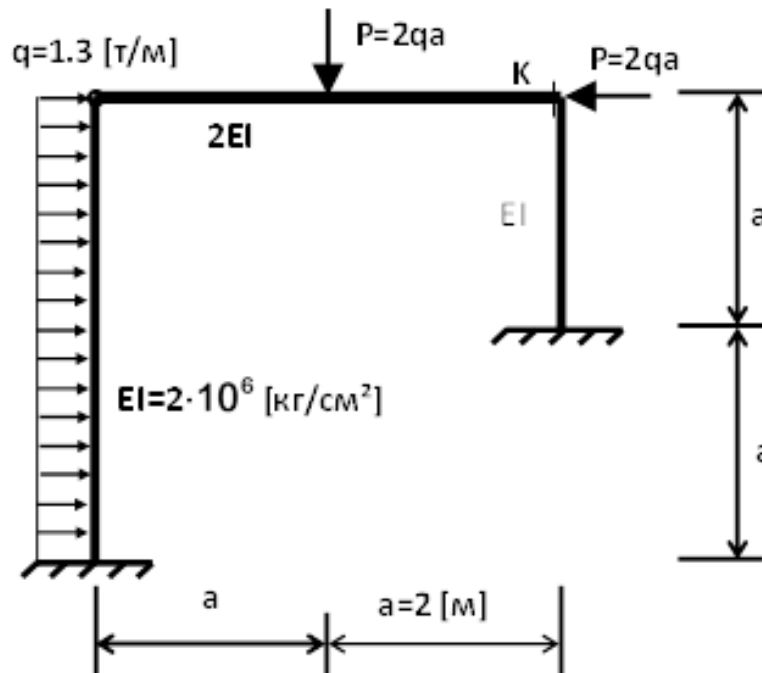


Рис. 1. Статически неопределимая рама.

Итак, система два раза статически неопределимая.

Или в заделках возникают шесть реакций, которые не определяются из 4-х уравнений равновесия плоской системы сил, приложенных к сооружению.

3.2. Выбор основной системы метода сил.

Основная система – статически определимая, геометрически неизменяемая. Разъединяя систему по шарниру, обозначим неизвестные внутренние усилия как X_1 и X_2 (рис 2.).

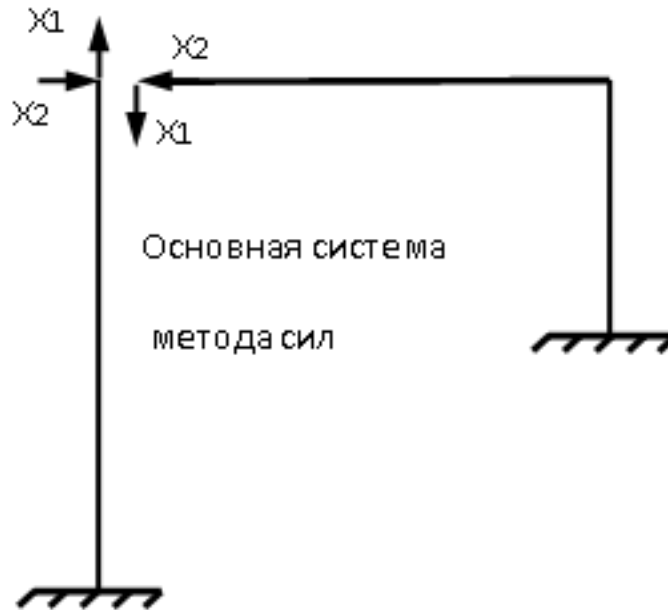


Рис. 2. Основная система метода сил.

3.3. Канонические уравнения метода сил.

Неизвестные (внутренние усилия) X_1 и X_2 определяются как решения системы канонических уравнений метода сил.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1q} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2q} = 0$$

δ_{11} - перемещение по направлению первого неизвестного X_1 , вызванное первым единичным воздействием $\bar{X}_1 = 1$.

δ_{12} - перемещение по направлению первого неизвестного X_1 , вызванное вторым единичным воздействием $\bar{X}_2 = 1$.

δ_{22} - перемещение по направлению второго неизвестного X_2 , вызванное вторым единичным воздействием $\bar{X}_2 = 1$.

Δ_{1q} - перемещение по направлению первого неизвестного X_1 , вызванное нагрузкой.

3.4. Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений.

Для этого, используя метод сечений, построим «единичные» M_1 и M_2 и грузовую M_q эпюры изгибающих моментов в основной системе метода сил (рис. 3, 4 и 5).

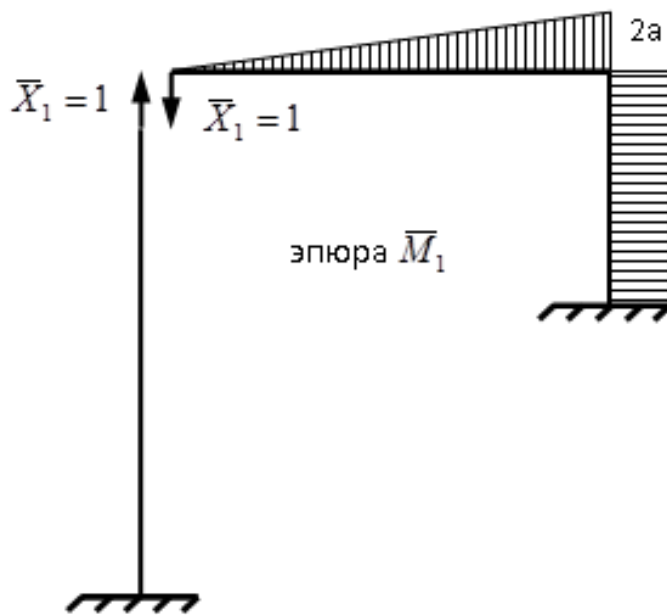


Рис. 3. Эпюра моментов в основной системе метода сил от действия только $\bar{X}_1 = 1$

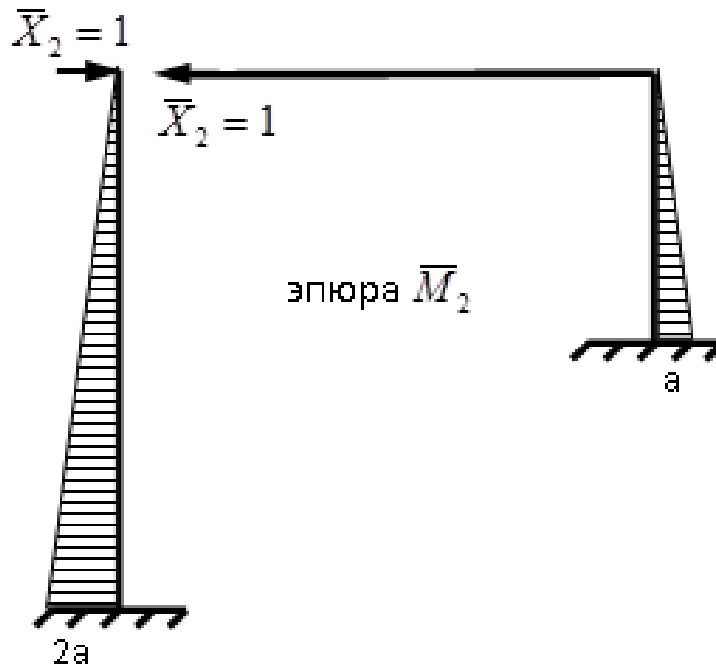


Рис. 4. Эпюра моментов в основной системе метода сил от действия только $\bar{X}_2 = 1$

Определяем единичные коэффициенты системы канонических уравнений метода сил (элементы матрицы податливости), подсчитывая соответствующие интегральные суммы по приближенным формулам (Верещагина, трапеций и Симпсона).

По формуле Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI_i} dz_i = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \cdot \frac{1}{2EI} + a \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{1}{EI} = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EI} + 4 \frac{a^3}{EI} = \frac{16}{3} \frac{a^3}{EI}$$

l_i - длина участка, на котором «перемножаются» гладкие функции;

EI_i - изгибная жесткость i -го участка.

По формуле Верещагина:

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI_i} dz_i = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{EI} = \frac{8}{3} \frac{a^3}{EI} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{EI} = 3 \frac{a^3}{EI}$$

По формуле Верещагина:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^1 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI_i} dz_i = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{1}{EI} = \frac{a^3}{EI}$$

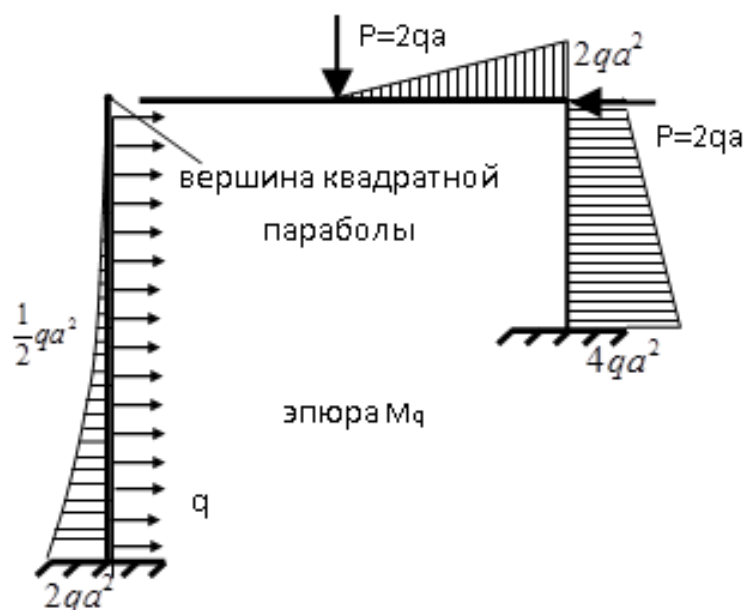


Рис. 5. Эпюра моментов в основной системе метода сил от действия внешней нагрузки (грузовая эпюра).

Определяем свободные члены системы канонических уравнений метода сил (перемещения по направлению неизвестных метода сил от нагрузки), подсчитывая соответствующие интегральные суммы по приближенным формулам.

По формуле трапеций и по формуле Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{1q} &= \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \cdot M_q}{EI_i} dz_i = \\ &= \frac{a}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot a \cdot 0 + 2 \cdot 2a \cdot 2qa^2 + a \cdot 2qa^2 + 2a \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{2} (2qa^2 + 4qa^2) \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{1}{EI} = \\ &= \frac{10}{12} \frac{qa^4}{EI} + 6 \frac{qa^4}{EI} = \frac{41}{6} \frac{qa^4}{EI} \end{aligned}$$

По формуле Симпсона и по формуле трапеций:

$$\begin{aligned} \Delta_{2q} &= \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_2 \cdot M_q}{EI_i} dz_i = \\ &= \frac{2a}{6 \cdot EI} (2a \cdot 2qa^2 + 4 \cdot a \cdot 0.5qa^2 + 0 \cdot 0) + \\ &+ \frac{a}{6 \cdot EI} (2 \cdot 0 \cdot 2qa^2 + 2 \cdot a \cdot 4qa^2 + 0 \cdot 4qa^2 + \\ &+ a \cdot 2qa^2) = 2 \frac{qa^4}{EI} + \frac{10}{6} \frac{qa^4}{EI} = \frac{11}{3} \frac{qa^4}{EI} \end{aligned}$$

3.5. Решение системы канонических уравнений метода сил.

Запишем систему канонических уравнений метода сил сократив на общий множитель $\frac{a^3}{EI}$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{16}{3} \cdot X_1 + X_2 + \frac{41}{6} qa = 0 \\ X_1 + 3 \cdot X_2 + \frac{11}{3} qa = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} 32 \cdot X_1 + 6X_2 + 41qa = 0 \\ 3X_1 + 9 \cdot X_2 + 11qa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \delta \cdot \vec{X} + \vec{\Delta} = 0 \Leftrightarrow \vec{X} = -\delta^{-1} \cdot \vec{\Delta}; \\ & \delta = \begin{pmatrix} 32 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} 41 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot qa \end{aligned}$$

Найдем матрицу обратную к матрице δ :

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента i -ой строки j -го столбца матрицы δ .

M_{ij} - определитель первого порядка, получаемый путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца матрицы δ .

Обратная матрица имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta^{-1} &= \frac{1}{\det \delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \\ \det \delta &= 32 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 288 - 18 = 270 \\ A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 9 = 9; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 32 = 32; \\ \delta^{-1} &= \frac{1}{270} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 32 \end{pmatrix} \\ \delta \cdot \delta^{-1} &= \begin{pmatrix} 32 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{270} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Найдем неизвестные метода сил:

$$\delta \cdot \bar{X} + \bar{\Delta} = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = -\delta^{-1} \cdot \bar{\Delta}; \quad \delta = \begin{pmatrix} 32 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{270} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot qa =$$

$$= -\frac{1}{270} \cdot \begin{pmatrix} 369 - 66 \\ -123 + 352 \end{pmatrix} \cdot qa = -\frac{1}{270} \cdot \begin{pmatrix} 303 \\ 229 \end{pmatrix} \cdot qa$$

$$X_1 = -\frac{303}{270} qa \approx -1.122qa$$

$$X_2 = -\frac{229}{270} qa \approx -0.848qa$$

3.6. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов «М».

Окончательную эпюру изгибающих моментов построим при помощи принципа независимости действия сил по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_q.$$

Будем считать положительными ординаты на грузовой эпюре. Результаты представим в табличной форме:

№ сеч.	$\bar{M}_1 \cdot X_1$	$\bar{M}_2 \cdot X_2$	M_q	M	$\times qa^2$
0	0	$-\frac{458}{270}$	$\frac{540}{270}$	$\frac{82}{270}$	0.304
1	0	$-\frac{229}{270}$	$\frac{135}{270}$	$-\frac{94}{270}$	-0.348
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	$-\frac{303}{270}$	0	0	$-\frac{303}{270}$	-1.122
5	$-\frac{606}{270}$	0	$\frac{540}{270}$	$-\frac{66}{270}$	-0.244
6	$-\frac{606}{270}$	0	$\frac{540}{270}$	$-\frac{66}{270}$	-0.244
7	$-\frac{606}{270}$	$-\frac{229}{270}$	$\frac{1080}{270}$	$\frac{245}{270}$	0.907

По результатам вычислений, учитывая знаки (эпюра моментов строится со стороны растянутых волокон), получаем окончательную эпюру моментов (рис. 6).

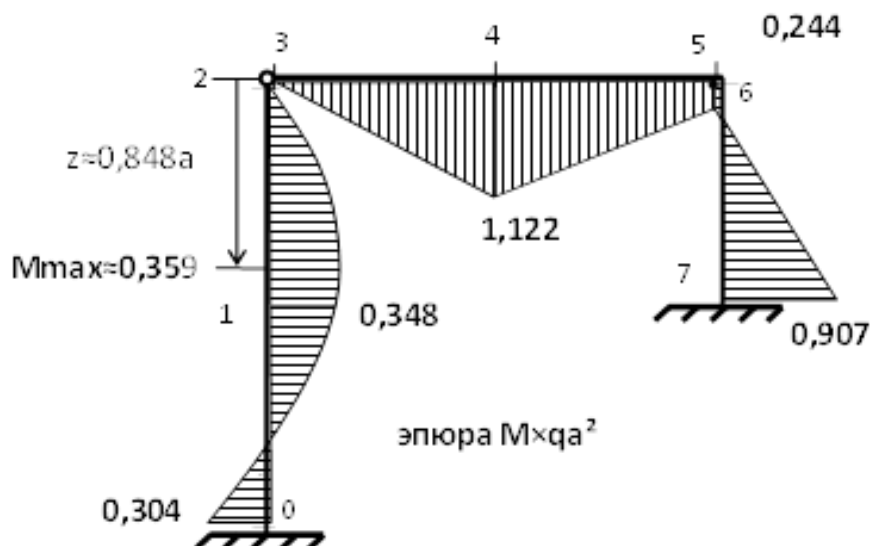


Рис. 6. Окончательная эпюра моментов в заданной системе.

3.7. Статическая и деформационная проверки окончательной эпюры моментов.

Статическая проверка построения окончательной эпюры моментов заключается в выполнении условий равновесия для узлов системы. Деформационная проверка подтверждает на отсутствие перемещений в заданной статически неопределимой системе по направлению отброшенных связей.

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M}{EI_i} dz_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

3.8. Определение линейного и углового перемещений узла «К».

Найдем горизонтальное перемещение точки К - u_K . Для этого построим в основной системе метода сил эпюры изгибающих моментов от единичной силы $\bar{P} = 1$, приложенной по направлению искомого перемещения u_K (рис. 7).

Перемещение u_K находим методом Максвелла-Мора, сопрягая («перемножая») соответствующие эпюры: окончательную эпюру изгибающих моментов M и эпюру моментов $M_{\bar{P}=1}^o$ по формуле трапеций:

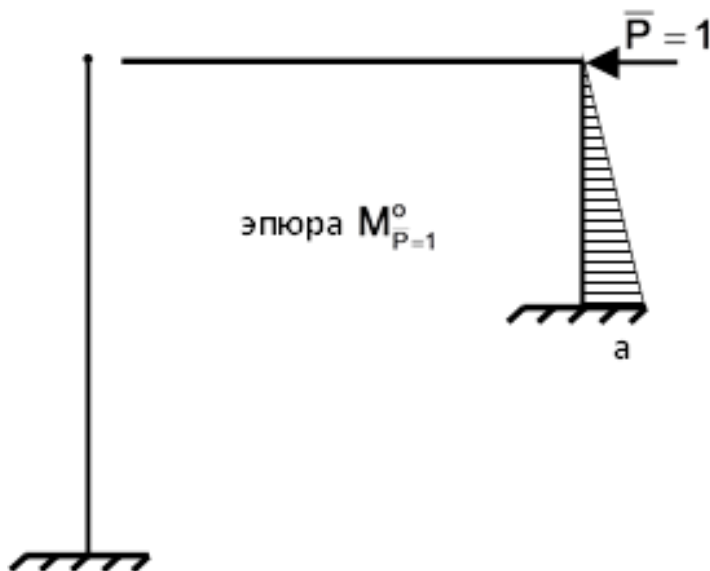


Рис. 7. Эпюра моментов, построенная в основной системе метода сил, от силы, приложенной по направлению искомого линейного перемещения.

Вычисляем искомое перемещение:

$$\begin{aligned}
 u_K &= \sum_{i=1}^1 \int_{l_i} \frac{M \cdot M_{\bar{P}}^o}{EI_i} dz_i = \\
 &= \frac{a}{6EI} \left(2 \cdot a \cdot \frac{245}{270} qa^2 - 0 - a \cdot \frac{66}{270} qa^2 + 0 \right) = \\
 &= \frac{424}{6 \cdot 270} \frac{qa^4}{EI} = \frac{106}{405} \frac{qa^4}{EI} \approx 0.262 \frac{qa^4}{EI}
 \end{aligned}$$

Найдем угол поворота узла К - φ_K . Для этого построим в основной системе метода сил эпюры изгибающих моментов от единичного момента $\bar{M} = 1$, приложенной по направлению искомого углового перемещения φ_K (рис. 8). Для нахождения интегральной суммы применяем формулу Верещагина.

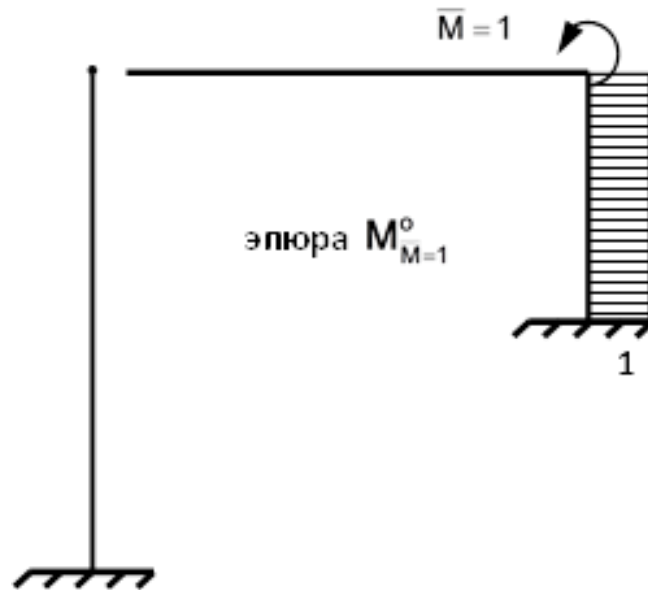


Рис. 8. Эпюра моментов, построенная в основной системе метода сил, от единичного момента, приложенного по направлению искомого углового перемещения.

Вычисляем искомый угол поворота сечения в точке К:

$$\begin{aligned} \varphi_K &= \sum_{i=1}^1 \int_{z_i} \frac{M \cdot M_{\bar{M}}^o}{EI_i} dz_i = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{245}{270} qa^2 - \frac{66}{270} qa^2 + 0 \right) \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \\ &= \frac{179}{2 \cdot 270} \frac{qa^3}{EI} = \frac{179}{540} \frac{qa^3}{EI} \approx 0.332 \frac{qa^3}{EI} \end{aligned}$$

3.9. Построение эпюры поперечных сил «Q».

По эпюре изгибающих моментов, вычлняют из схемы прямолинейные стержни-участки, прикладывают к ним все внешние нагрузки и внутренние силовые факторы (значения изгибающих моментов берут из уже построенной эпюры M. Из условия равновесия определяют значения поперечных сил в сечениях 0-2-3-4-5-6-7 (рис. 9).

Участок 0-2.

$$\Sigma M_0 = 0: Q_2 \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a - 0,304qa^2 = 0;$$

$$Q_2 = -0,848qa.$$

$$\Sigma M_2 = 0: Q_0 \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a - 0,304qa^2 = 0;$$

$$Q_0 = 1,152qa.$$

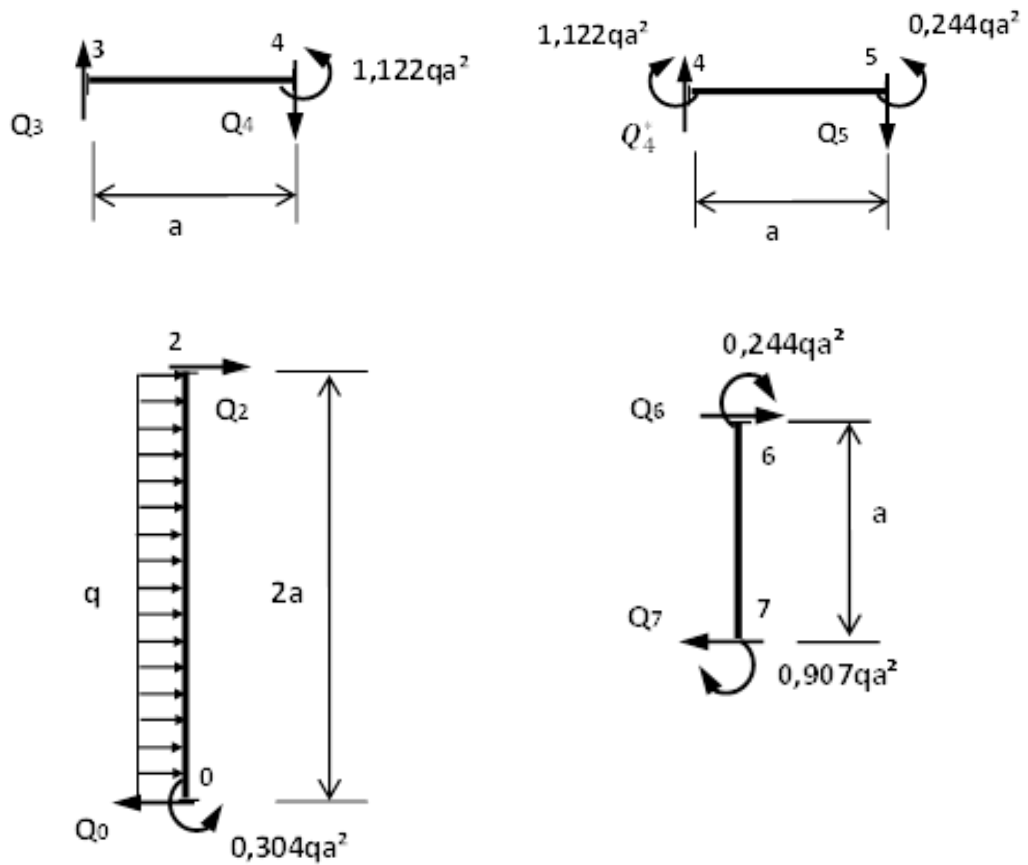


Рис. 9. К определению поперечных сил в сечениях элементов рамы.

Участок 3-4.

$$\sum M_3 = 0: Q_4 \cdot a - 1,122 qa^2 = 0; Q_4 = 1,122 qa.$$

$$\sum M_4 = 0: Q_3 \cdot a - 1,122 qa^2 = 0; Q_3 = 1,122 qa.$$

Получена поперечная сила Q_4 бесконечно близко слева от сечения, где приложена внешняя сила $F=2qa$.

Участок 4-5

$$\sum M_4 = 0: Q_5 \cdot a + 1,122 qa^2 - 0,244 qa^2 = 0;$$

$$Q_5 = -0,878 qa.$$

$$\sum M_5 = 0: Q_4^* \cdot a + 1,122 qa^2 - 0,244 qa^2 = 0;$$

$$Q_4^* = -0,878 qa.$$

Получена поперечная сила Q_4^* бесконечно близко справа от сечения, где приложена внешняя сосредоточенная сила $F=2qa$.

Участок 6-7

$$\Sigma M_7 = 0: Q_6 \cdot a + 0,244qa^2 + 0,907qa^2 = 0;$$

$$Q_6 = -1,151qa.$$

$$\Sigma M_6 = 0: Q_7 \cdot a + 0,907qa^2 + 0,244qa^2 = 0;$$

$$Q_7 = -1,151qa.$$

Эпюра распределение поперечных сил в элементах рамы показана на рис. 10.

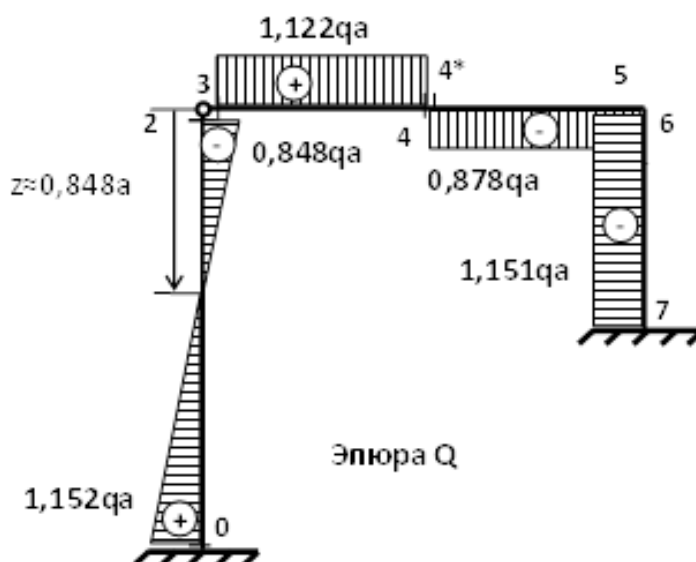


Рис 10. Эпюра поперечных сил в раме.

3.10. Построение эпюры продольных сил «N».

Для нахождения значений продольных сил в прямолинейных частях рамы вырезают узлы. Прикладывают уже найденные поперечные силы и сосредоточенные нагрузки. Из условия равновесия в виде суммы проекций всех сил на оси декартовой системы координат находят продольные силы.

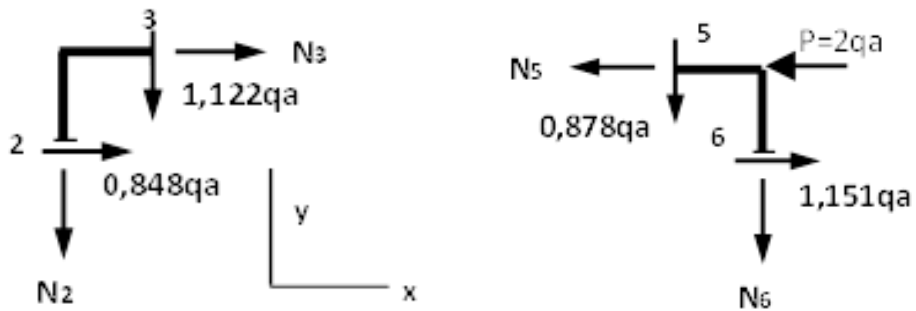


Рис. 11. К определению продольных сил в элементах рамы.

Узел 2- 3. $\Sigma X = 0: N_3 + 0,848 qa = 0; N_3 = -0,848 qa.$

$\Sigma Y = 0: N_2 + 1,122 qa = 0; N_2 = -1,122 qa.$

Узел 5- 6.

$\Sigma Y = 0: N_6 + 0,878 qa = 0; N_6 = -0,878 qa.$

$\Sigma X = 0: N_5 + 2qa - 1,151 qa = 0; N_5 = -0,848 qa.$

Для проверки правильности нахождения внутренних усилий в ригеле рассмотрим сечение 4-4* (рис. 12).

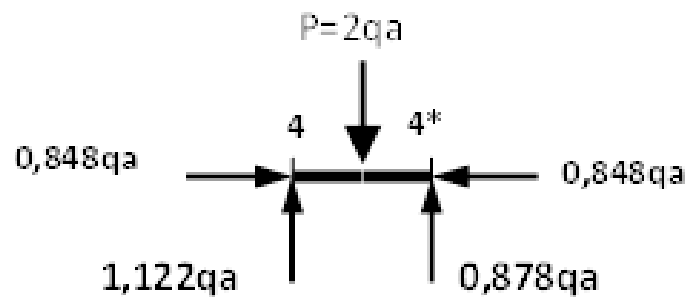


Рис. 12. К проверке условий равновесие участка стержня.

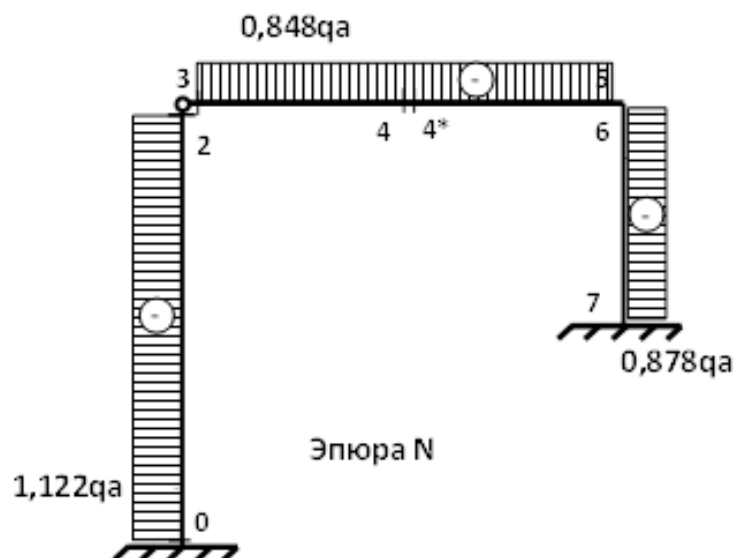


Рис. 13. Эпюра продольных сил.

3.11. Определение экстремальных нормальных напряжений в опасных сечениях рамы и проверка выполнения условия прочности.

Для того чтобы определить нормальные напряжения в точках сечений необходимо задаться геометрическими характеристиками поперечных сечений рамы. По эпюрам изгибающих моментов и продольных сил находят сечения, в которых внутренние силовые факторы (M и N) принимают экстремальные значения. Для вычисления нормальных напряжений в точках поперечного сечения применяют формулу сложного сопротивления:

$$\sigma_{в\ точка} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W},$$

где A – площадь поперечного сечения [$см^2$],

W – момент сопротивления площади сечения относительно оси [$см^3$].

Полученные нормальные напряжения в точках поперечного сечения сравнивают с расчётным сопротивлением материала рамы.

Литература.

Основная.

1. В.А.Смирнов, А.С.Городецкий. Строительная механика. Издательство ЮРАЙТ, 2013 г.
2. В.А.Смирнов, С.А.Иванов, М.А.Тихонов. Строительная механика. М., Стройиздат, 1984 г.

Дополнительная.

1. В.Д. Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин . Строительная механика. Статика упругих систем.Москва., «Высшая школа», 2007.
2. А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. М., Высшая школа, 1986 г.
3. Г.К. Клейн и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М., Высшая школа, 1980 г.
4. Н.Н.Анохин. Строительная механика в примерах и задачах. Часть II. Статически неопределимые системы. Издательство Ассоциации строительных вузов. М., 1999 г.